Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Coloração Total Equilibrada do Snark Estrela Dupla

Rieli Araújo[1], Diana Sasaki[2]
CCOMP/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Uma **coloração total própria** de um grafo $G(V, E)$ é uma atribuição de k cores tanto para os seus vértices, quanto para suas arestas de forma que não tenhamos cores iguais atribuídas aos elementos adjacentes e incidentes. O **número cromático total** de G, denotado por $\chi''(G)$, é o menor k para o qual G possui uma coloração total própria. Em [1, 6], de forma independente, conjecturaram que o número cromático total é $\chi''(G) = \Delta + 1$ ou $\chi''(G) = \Delta + 2$, onde Δ é o grau máximo do grafo. Apesar da conjectura continuar em aberto, em [5] foi verificado que a conjectura é válida para grafos cúbicos, e dizemos que grafos cúbicos são **Tipo 1** quando $\chi''(G) = 4$, e **Tipo 2** quando $\chi''(G) = 5$.

Uma coloração total é **equilibrada** quando as cardinalidades de quaisquer duas classes de cor diferem em no máximo 1, o **número cromático total equilibrado** $\chi''_e(G)$ é o menor k para o qual G possui uma coloração total equilibrada. Em 1994, Fu [4] conjecturou que o número cromático total equilibrado de um grafo simples satisfaz $\chi''_e(G) \leq \Delta + 2$. A conjectura continua em aberta. Em 2002, Wang [7] provou que a mesma é válida para grafos cúbicos. Com isso, temos que grafos cúbicos possuem $\chi''_e(G) = 4$ ou $\chi''_e(G) = 5$.

No estudo conduzido por [3], foi explorada a questão sobre a existência de grafos cúbicos Tipo 1 com número cromático total equilibrado $\chi''_e = 5$. Entre os grafos cúbicos, destaca-se uma classe conhecida como **snarks**, grafos que além de cúbicos, não possuem pontes, são ciclicamente 4-aresta-conexos, com cintura pelo menos 5, e que não podem ser coloridos com apenas 3 cores em suas arestas. Esses grafos são conhecidos por serem contraexemplos de diversas conjecturas na Teoria dos Grafos.

Este trabalho é parte de um estudo mais abrangente sobre colorações totais equilibradas em grafos snarks; dentre os snarks investigados até então, todos possuem número cromático equilibrado igual a 4. Nosso objetivo é contribuir com a questão levantada em [3]. Neste trabalho, verificamos que o snark Estrela Dupla, composto por 30 vértices e 45 arestas, possui uma 4-coloração total equilibrada, contribuindo assim de forma negativa para a questão motivadora e resultando no Teorema 1, apresentado a seguir.

Teorema 1. *O snark Estrela Dupla possui número cromático total equilibrado 4.*

Ideia da prova Em [2], foi mostrado que todo snark com até 30 vértices é Tipo 1, portanto temos que o snark Estrela Dupla possui uma 4-coloração total. Provamos que é possível colorir este mesmo grafo com uma 4-coloração total equilibrada. Para tanto, considere c_1, c_2, c_3, c_4 as classes de cores usadas na coloração total do grafo. Este snark possui 75 elementos entre vértices e arestas, e obtemos uma coloração total equilibrada com classes de cores c_1, c_2, c_3, c_4 possuindo cardinalidades iguais a 19, 19, 19 e 18, respectivamente. Na Figura 1 é apresentada esta 4-coloração total equilibrada.

[1]rieli.araujo@pos.ime.uerj.br
[2]diana.sasaki@ime.uerj.br

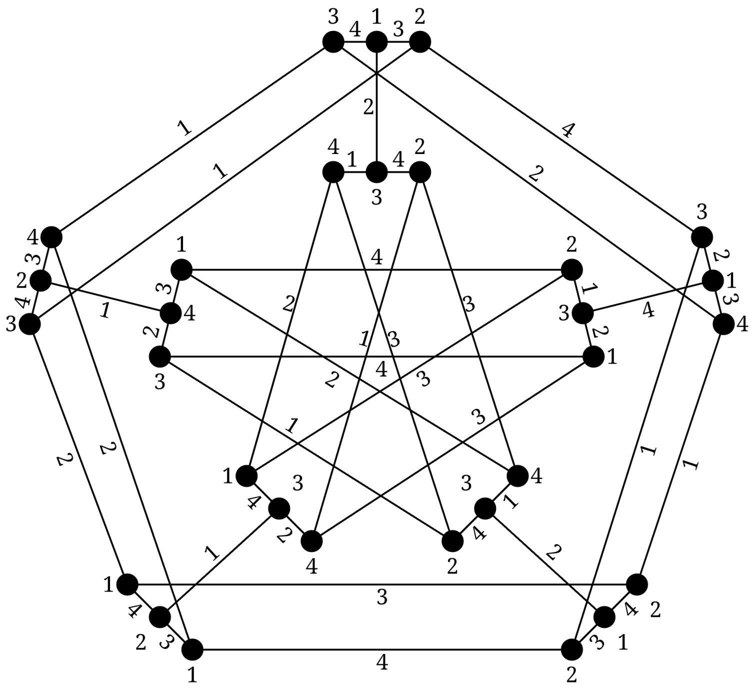

Figura 1: Snark Estrela Dupla com uma coloração total equilibrada com 4 cores.

Referências

[1] M. Behzad. "Graphs and Their Chromatic Numbers". Tese de doutorado. Michigan State University, 1965.

[2] A. Cavicchioli, T. E. Murgolo, B. Ruini e F. Spaggiari. "Special classes of snarks". Em: **Acta Applicandae Mathematica** 76 (2003), pp. 57–88. DOI: `https://doi.org/10.1023/A:1022864000162`.

[3] S. Dantas, C. M. H. Figueiredo, G. Mazzuoccolo, M. Preissman, V. F. Santos e D. Sasaki. "On the equitable total chromatic number of cubic graphs". Em: **Discrete Applied Mathematics** 209 (2016), pp. 84–91. DOI: `10.1016/j.dam.2015.10.013`.

[4] H-L Fu. "Some results on equalized total coloring". Em: **Congressus numerantium** (1994), pp. 111–120.

[5] M. Rosenfeld. "On the total chromatic number of a graph". Em: **Israel Journal of Mathematics** 9 (1971), pp. 396–402. DOI: `10.1007/BF02771690`.

[6] V. G. Vizing. "On an estimate of the chromatic class of a p-graph." Em: **Diskret Analiz** 3 (1964), pp. 25–30. URL: `https://cir.nii.ac.jp/crid/1573387450444678016`.

[7] W. Wang. "Equitable Total Coloring of Graphs with Maximum Degree 3". Em: **Graphs and Combinatorics** 18 (2002), pp. 677–685. DOI: `10.1007/s003730200051`.