

Análise de Poços: Modelagem e Solução de Equações Diferenciais em Cilindros Ocos

Renan P. Souza,¹ Patrícia N. da Silva,²

PPG Ciências Computacionais e Modelagem Computacional, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

De acordo com Chen e Saleeb [1], um material se deforma ao reagir à ação de forças externas. A solução de um problema de mecânica aplicada a estabilidade de poços, como descrito por Chen e Saleeb [1], envolve a aplicação de três passos essenciais para entender e prever o comportamento de um poço sob diferentes condições de carga e deformação: equações de equilíbrio, condições de geometria ou a compatibilidade de deformações, e leis constitutivas do material, isto é, as relações tensão-deformação. O equilíbrio de tensões são expressos em termos de coordenadas cilíndricas, com isso pode-se relacionar as tensões dentro de um corpo com as forças internas e externas atuando na superfície do corpo. Existem três equações de equilíbrio relacionando os seis componentes do tensor de tensão para um elemento infinitesimal do corpo.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho_{fr} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho_{f\theta} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho_{fz} = 0. \quad (3)$$

A influência do material é expressa por um terceiro conjunto de equações, nomeadas como equações constitutivas, que descrevem as relações entre tensões e deformações. No caso linear, existem seis equações expressando os componentes de deformação em termos de componentes de tensão, ou vice-versa. Estas são conhecidas como a lei de Hooke:

$$\sigma_r = (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_r + \lambda_{fr}\varepsilon_\theta + \lambda_{fr}\varepsilon_z, \quad \sigma_\theta = \lambda_{fr}\varepsilon_r + (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_\theta + \lambda_{fr}\varepsilon_z, \quad (4)$$

$$\sigma_z = \lambda_{fr}\varepsilon_r + \lambda_{fr}\varepsilon_\theta + (\lambda_{fr} + 2G_{fr})\varepsilon_z, \quad \tau_{r\theta} = 2G_{fr}\Gamma_{r\theta}, \quad (5)$$

$$\tau_{rz} = 2G_{fr}\Gamma_{rz}, \quad \tau_{\theta z} = 2G_{fr}\Gamma_{\theta z}. \quad (6)$$

onde σ_r , σ_θ e σ_z representam as tensões radial, tangencial e axial, respectivamente. Elas são calculadas somando as contribuições das deformações nas direções radial, tangencial e axial, multiplicadas pelos coeficientes elásticos apropriados. $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} e $\tau_{\theta z}$ representam as tensões de cisalhamento radial-tangencial, radial-axial e tangencial-axial, respectivamente. São calculadas como o dobro do módulo de elasticidade tangencial multiplicado pela taxa de deformação de cisalhamento correspondente.

O estado de deformação completo em um ponto dentro de um corpo segundo as direções r θ é descrito por Fjær *et al.* [2] através das equações em (7), bem como as tensões efetivas

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \alpha p_f.$$

Fjær *et al.* [2] apresentam o problema do cilindro oco infinito como representado na Figura 1, possuindo simetria rotacional e translacional, resultando em uma pressão constante ao longo de

¹renan.prrs@gmail.com

²nunes@ime.uerj.br

seu eixo. As tensões no cilindro são distribuídas uniformemente. Inicialmente carregado com uma tensão axial σ_v , podemos derivar expressões para as tensões à medida que é submetido a uma pressão interna p_w e uma tensão externa σ_{ro} . As tensões externas no cilindro são normais e independentes de θ e z , portanto os eixos de coordenadas cilíndricas representam as direções das tensões principais. A única deformação será na direção radial e que não haverá variação ao longo do eixo. Assim, o modelo estará em deformação plana, implicando que a deformação axial $\varepsilon_z = 0$.

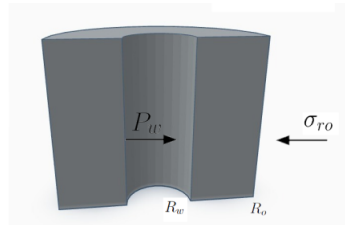


Figura 1: Seção do modelo de cilindro oco. Fonte: Fjær *et al.* [2].

Ignorando as forças de corpo, as equações de equilíbrio (1)–(3) são simplificadas para uma única equação

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

Agora substituímos a tensão pelo deslocamento radial u usando as Eqs. (4)–(6) (lei de Hooke), a definição de tensão efetiva (7), e as deformações em termos de u das equações em (7). O resultado é

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{\alpha}{\lambda_{fr} + 2G_{fr}} \frac{dp_f}{dr} = 0.$$

Quando esta EDO de segunda ordem é resolvida, as deformações radial e tangencial podem ser determinadas, e assim as tensões podem ser encontrados usando a lei de Hooke.

Palavras-chave: elasticidade, poços, leis constitutivas, tensores

Agradecimentos

Os autores agradecem a colaboração da Dra. Cláudia Bonin de Oliveira e o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), processos E-26/010/101140/2018 e SEI-260003/014695/2022.

Referências

- [1] W. F. Chen e A. F. Saleeb. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Volume 1: Elasticity and Modeling**. Second, Revised Edition. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [2] E. Fjær, R.M. Holt, P. Horsrud e A.M. Raaen. **Petroleum Related Rock Mechanics**. Amsterdam: Elsevier Science, 2008.