Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Estudo do Comportamento do Método da Potência Utilizando Método dos Mínimos Quadrados

João Pedro Fernandes de Aquino[1], Gabriel Almeida Lima[2], Ivan Mezzomo[3], Matheus da Silva Menezes[4], Stefeson Bezerra de Melo[5]
DCME/UFERSA, Mossoró, RN,
Modesto Valci Moreira Lopes[6]
PPGEM/USP, São Paulo, SP

Os autovalores e autovetores estão presentes em diversos ramos da matemática, tais como formas quadráticas, sistemas diferenciais e problemas de otimização não linear. Podem ser usados para resolver problemas em diversas áreas, tais como economia, teoria da informação, análise estrutural, eletrônica, entre outros [1].

Podemos determinar os autovalores de uma matriz de forma analítica através das raízes do polinômio característico da matriz, mas essa estratégia pode se tornar custosa à medida que o grau do polinômio característico aumenta demasiadamente. Assim, a utilização de métodos numéricos iterativos para a resolução desses problemas se torna necessária. O Método da Potência (MP) é um dos métodos numéricos mais utilizados para encontrar o autovalor dominante de uma matriz e seu respectivo autovetor.

Este estudo tem por objetivo fazer uma análise em relação ao comportamento do MP utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para estimar qual a função do MMQ melhor se ajusta ao gráfico do conjunto de pontos formado pelas iterações do MP.

Teorema 1 [1]: Dada uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência y_k definida por $y_{k+1} = Ay_k$, com $k = 1, 2, \ldots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1, \tag{1}$$

onde r indica a r-ésima componente.

Quanto maior for $|\lambda_1|$ em relação a $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência do MP.

De acordo com [2], no caso discreto, o MMQ tem por objetivo aproximar um conjunto de n pontos distintos por uma função de aproximação $F(x)$, de tal maneira que a distância desse conjunto de n pontos a $F(x)$ seja a menor possível. Para o estudo, utilizamos as seguintes funções de aproximação: linear, polinomial, logarítmica, exponencial e potencial, com o intuito de averiguar qual destas funções melhor se ajustam aos pontos dados pelo MP.

As matrizes utilizadas são provenientes do repositório Florida Sparse Matrix Collection, sendo do tipo esparsa e simétrica. A implementação foi realizada em Python 3.11.5, em um sistema com processador Intel Core i5 11a Geração, 16GB de RAM e Linux Ubuntu 22.04.4 LTS de 64 bits. O critério de parada utilizado para o MP foi o erro relativo ou 10.000 iterações, com precisão de 10^{-5}.

[1] joao.aquino03085@alunos.ufersa.edu.br
[2] gabriel.lima66961@alunos.ufersa.edu.br
[3] imezzomo@ufersa.edu.br
[4] matheus@ufersa.edu.br
[5] stefeson@ufersa.edu.br
[6] modsval@usp.br

Para avaliar o ajuste das funções ao conjunto de pontos dados pelo MP, usamos o coeficiente de determinação R^2. Os resultados das implementações do MP para as matrizes utilizadas neste trabalho estão presentes na Tabela 1, bem como as duas funções de aproximação do MMQ que melhor se ajustaram ao conjunto de pontos.

Tabela 1: Resultado da implementação computacional das matrizes estudadas.

Matriz	Ordem	Autovalores (MP)	Iter. (MP)	Função de Aproximação	R^2
bcsstk02	66	18225.29	28	Logarítmica	0.84
				Polinomial de 2^o Grau	0.83
				Potencial	0.79
				Linear	0.49
bcsstk05	153	6197043.86	38	Polinomial de 2^o Grau	0.90
				Logarítmica	0.89
				Potencial	0.84
				Linear	0.58

Os gráficos comparativos entre o conjunto de pontos dos autovalores do MP com a função de aproximação do MMQ, que melhor se ajustou ao respectivo conjunto de pontos para as matrizes bcsstk02 e bcsstk05, estão dispostos nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

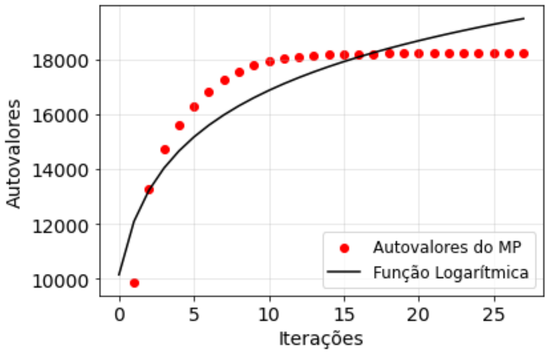

Figura 1: Gráfico comparativo da matriz bcsstk02. Fonte: Autoria Própria.

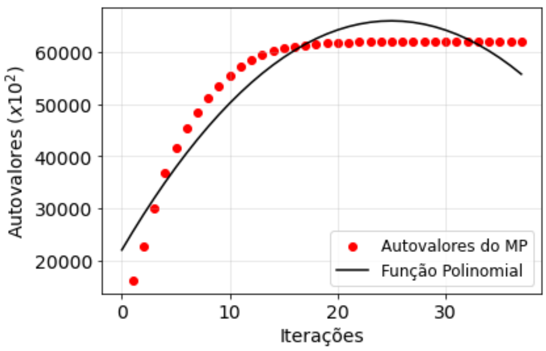

Figura 2: Gráfico comparativo da matriz bcsstk05. Fonte: Autoria Própria.

Ao analisar a Tabela 1, podemos observar que, de acordo com o coeficiente de determinação R^2, as funções de aproximação do MMQ que tiveram melhor desempenho foram as funções logarítmicas e polinomiais de 2^o grau, seguidas pela função potencial. Já a função linear, que aparece na sequência, não apresenta coeficiente de determinação satisfatório. A partir da análise dos gráficos, é possível observar o comportamento do conjunto de pontos dos autovalores do MP e da função de aproximação do MMQ, que teve melhor ajuste para cada matriz.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução desta pesquisa.

Referências

[1] N. M. B. Franco. **Cálculo Numérico**. 1ª ed. São Paulo: Pearson, 2006. ISBN: 8576050870.

[2] S. Arenales e A. Darezzo. **Cálculo Numérico: Aprendizado com apoio de software**. 2ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.