Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método Multigrid com Level Set para Problemas Elípticos em Domínios Arbitrários

Anderson C. Santos[1]
Departamento de Física - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ
Wellington C. Jesus[2]
Departamento de Matemática - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ
Catalina M. R. Alvarez[3]
Departamento de Matemáticas y Estadística - Universidad de Nariño, Pasto - Nariño, Colombia

A equação elíptica em domínios arbitrários (possivelmente com fronteira móvel) é central para muitas aplicações, como fenômenos de difusão, dinâmica de fluidos, eletromagnetismo e muitos outros. A ampla gama de aplicações pode exigir diferentes tipos de condições de fronteira. Os Métodos de Elementos Finitos (MEF) são abordagens bem estabelecidas para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP), no entanto, apresentam dificuldades na geração de elementos para representar uma variação significativa da curvatura de fronteiras complexas e o projeto de partição balanceada da malha para aplicações paralelas é pouco prático. Por estas razões, métodos *Level Set* (LS) com abordagens baseadas em Métodos de Diferenças Finitas (MDF) onde o domínio está imerso em uma malha fixa estão aumentando sua popularidade na literatura, uma vez que não requerem nenhum esforço de geração de malha e ao mesmo tempo permitem um projeto natural de redes paralelas [2]. O método Multigrid (MG) está entre os métodos iterativos mais eficientes para EDP discretas. Inicialmente projetados para equações elípticas, os métodos MG foram amplamente adotados para resolver inúmeros problemas graças ao seu custo de computação ideal que é escalonado linearmente em relação ao número de nós computacionais para matrizes esparsas, superando muitos outros métodos numéricos. Embora inicialmente abordagens de MG tenham sido propostas para domínios simples, como retângulos em 2D e cubos em 3D, a aplicação a domínios de formas mais complexas ganhou um interesse crescente na comunidade científica nos últimos anos em vários contextos [2]. Neste contexto, no presente trabalho considerou-se a equação elíptica com coeficiente γ

$$-\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = f, \text{em } \Omega, \tag{1}$$

com condições de fronteira $u = g_D, \text{em } \Gamma_D$ (Dirichlet) e/ou $\partial u/\partial \mathbf{n} = g_N, \text{em } \Gamma_N$ (Neumann), sendo $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$, enquanto $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma_D \to \mathbb{R}$ e $g_N : \Gamma_N \to \mathbb{R}$ são funções atribuídas. Na solução numérica desta equação considera-se um domínio computacional $D = [-1, 1]^d$, com $d \geq 1$ um inteiro, sendo resolvida em um domínio arbitrário suave $\Omega \subset D$, isto é, $\partial\Omega \in C^1$ (podendo representar uma forma complexa) de tal forma que $\partial\Omega \cap \partial D = \emptyset$ (interseção das fronteiras de D e Ω é o conjunto vazio). Podendo ainda $\{\Gamma_D, \Gamma_N\}$ representar uma partição de $\partial\Omega$ (isto é, $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$). A fronteira Γ pode ser capturada com uma função de level set $\phi_0 : D \to \mathbb{R}$, de tal maneira que $(x, y) \in \mathring{\Omega} \Leftrightarrow \phi_0(x, y) < 0$, $(x, y) \in \partial\Omega \Leftrightarrow \phi_0(x, y) = 0$. A partir da função de level set, é possível calcular o vetor normal unitário exterior à interface (o conjunto de nível zero) e a curvatura: $\mathbf{n} = \nabla\phi_0/|\nabla\phi_0|$, $k = \nabla \cdot \mathbf{n}$. A discretização do operador elíptico (na equação (1)) é realizada pelo MDF utilizando diferenças centradas, usando o estêncil

[1]andersoncorrea@id.uff.br
[2]wellingtonjesus@id.uff.br
[3]catalina.rua@udenar.edu.co

simétrico de cinco pontos em duas dimensões espaciais, centrado em cada uma das N_i células da malha interna (em $\mathring{\Omega}$, interior de Ω). A simetria do estêncil de cinco pontos próximos à fronteira Γ sugere a introdução de Ng células fantasmas (*ghost-cell*), ou seja, células da malha cartesiana fora do domínio Ω e pertencentes a um estêncil de cinco pontos centrados em um ponto interior. Para fechar o sistema linear discreto, escreve-se uma equação para cada célula fantasma, aplicando a condição de contorno na célula mais próxima da fronteira, por uma interpolação adequada. O desenvolvimento do método MG para a solução do sistema formado pela equação (1), com condições de fronteira, teve como ponto de partida o estudo e implementação baseados no trabalho de Coco [3] para $d = 2$, $\Omega = [0, 1]^d$ e $\gamma = 1$, para condições de fronteira de Dirichlet e Neumann. Posteriormente, foi estudado e implementado um método LS baseado no trabalho de Chen et al. [1]. A seguir, um método MG foi desenvolvido, baseado no trabalho de Köstler [4], com células fantasmas para a equação (1) discretizada por MDF com as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann em duas dimensões. Testes numéricos em diferentes geometrias e resolução de malha foram realizados. Em todos os testes foram escolhidas expressões analíticas da solução exata $\mathbf{u}$ e do coeficiente de difusão γ com as quais foram determinadas as condições necessárias para o problema (f, g_D e g_N), além de serem usadas nas estimativas de erros e ordem de precisão. Inspirado em [3], a partir de uma expressão analítica escolhida para a função de level set ϕ_0 foi definida uma função distância com sinal ϕ por um procedimento de reinicialização baseado na solução numérica da equação $\partial\phi/\partial t = sinal(\phi_0)(1 - ||\nabla\phi||)$, ϕ desempenha o papel de função de level set. Em domínios mais simples (como círculo ou elipse) o fator de convergência ideal (reportado na literatura de multigrid) é alcançado mesmo se o método for usado em malhas muito grosseiras, enquanto para domínios mais complexos (como um em forma de flor) o fator de convergência ideal é obtido apenas em malhas suficientemente refinadas e às vezes é ligeiramente diferente do fator ideal. Com esta geometria mais complexa, o multigrid não converge se a malha mais grosseira usar $N = 8$ (malha para o domínio computacional D de NxN), convergindo apenas para o valor mínimo de $N = 16$. No caso do coeficiente γ ser suave, o método mantém a precisão de segunda ordem. Se o coeficiente γ não for suave, é observada uma perda de precisão. Melhores condições de convergência do método MG para domínios complexos e manutenção da precisão numérica para coeficientes γ não suave estão sob investigação numérica e teórica baseadas em estudos recentes [2] que utilizam diversas ferramentas da teoria matricial e em particular da configuração de operadores Toeplitz, cuja análise fornece informações sobre a estabilidade do método.

Referências

[1] S. Chen, B. Merriman, S. Osher e P. Smereka. "A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problems". Em: **Journal of Computational Physics** 135.1 (1997), pp. 8–29. ISSN: 0021-9991. DOI: `https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5721`.

[2] A. Coco, S-E. Ekström, G. Russo, S. Serra-Capizzano e S. C. Stissi. "Spectral and norm estimates for matrix-sequences arising from a finite difference approximation of elliptic operators". Em: **Linear Algebra and its Applications** 667 (2023), pp. 10–43. ISSN: 0024-3795. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.03.005`.

[3] A. Coco e G. Russo. "Finite-difference ghost-point multigrid methods on Cartesian grids for elliptic problems in arbitrary domains". Em: **Journal of Computational Physics** 241 (2013), pp. 464–501. ISSN: 0021-9991. DOI: `https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.11.047`.

[4] H. Köstler. **Multigrid HowTo: A simple Multigrid solver in C++ in less than 200 lines of code**. Online, UnivIS-Import:2016-06-30:Pub.2008.tech.IMMD.lsinfs.multig_9. Acessado em 03/03/2024, `https://www10.cs.fau.de/publications/reports/TechRep_2008-03.pdf`.

