

Análise do Crescimento Populacional de Volta Redonda a Partir de Modelos Clássicos de Dinâmica Populacional Unidimensionais

Lucas S. Paiva, Marina R. B. Dias¹

Departamento de Matemática - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ

Uma importante questão na área de ecologia é determinar como populações crescem. Nem sempre o problema de modelar o crescimento de uma população tem resposta simples e, por isso, uma variedade de modelos são propostos e podem ser encontrados na literatura [1, 2]. Entender os modelos clássicos de dinâmica populacional unidimensional torna-se tarefa indispensável para que se consiga propor adaptações desses modelos ou mesmo novos modelos que se adéquem a uma população específica. Neste trabalho propõe-se o estudo de três modelos: modelo de Malthus, de Verhulst [2] e de Montroll [1] com destaque às suas diferenças e características inerentes de cada um deles. Para além do estudo teórico, este trabalho propõe a análise crítica dos modelos através de um estudo de caso: modelar a população da cidade de Volta Redonda, no estado do Rio de Janeiro. Serão feitas simulações numéricas, com base em dados reais, para estimar os parâmetros de cada modelo e, então, será feita uma comparação entre as soluções obtidas numericamente e os dados reais coletados.

Podemos explicitar, de maneira simplificada, que o modelo de Malthus propõe que a taxa de variação da população é proporcional ao tamanho da população. Já os modelos de Verhulst e de Montroll entendem que a população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar [1] e, por isso, incorpora em sua formulação uma queda no crescimento da população. As equações diferenciais que descrevem os modelos citados, bem como a solução analítica de cada uma delas está descrita a seguir:

Modelo de Malthus: Supondo $N(t)$ o valor da população no instante t , a solução do modelo de Malthus é dada por $N(t) = N_0 e^{kt}$, onde $k > 0$ é a taxa de crescimento e $N(0) = N_0$ indica a população inicial.

Modelo de Verhulst: Supondo $N(t)$ o valor da população no instante t , a solução do modelo de Verhulst é dada por $N(t) = \frac{N_0 \beta}{N_0 + (\beta - N_0) e^{-rt}}$, onde $N(0) = N_0$ indica a população inicial, β é a capacidade suporte e r é a taxa de crescimento da população.

Modelo de Montroll: Sendo $N(t)$ o valor da população no instante t , a solução do modelo de Montroll é dada por $N(t) = \frac{N_0 \beta}{[N_0^\alpha + (\beta^\alpha - N_0^\alpha) e^{-\alpha r t}]^{\frac{1}{\alpha}}}$, onde $N(0) = N_0$ indica a população inicial, β é a capacidade suporte, r é a taxa de crescimento da população e α é o indicador da posição do ponto de inflexão da curva. Vale ressaltar que para $\alpha = 1$, o modelo de Montroll se equivale ao modelo de Verhulst.

Na Figura 1a está ilustrada a população de Volta Redonda em função do tempo, em anos, segundo dados do IBGE [3], [4]. Percebe-se que a população ainda está em crescimento, o que permeia a tentativa de descrever a população através de modelos matemáticos, a fim de prever o tamanho da população em anos posteriores. Supondo que a população de Volta Redonda cresce de acordo com o Modelo de Malthus, estimamos o parâmetro $k = 0,00582011$ através de um ajuste

¹marinaribeiro@id.uff.br

linear sobre os dados, que gerou a reta $z = kt + b$, onde $z = \ln N(t)$ e $b = \ln N_0 \simeq 0,999412$, o que implica $N_0 \simeq 2,71667036518$. Assim, a população foi modelada utilizando os parâmetros obtidos, conforme visto na Figura 1b. Com os resultados obtidos fica evidente a necessidade de um melhor ajuste da taxa de crescimento.

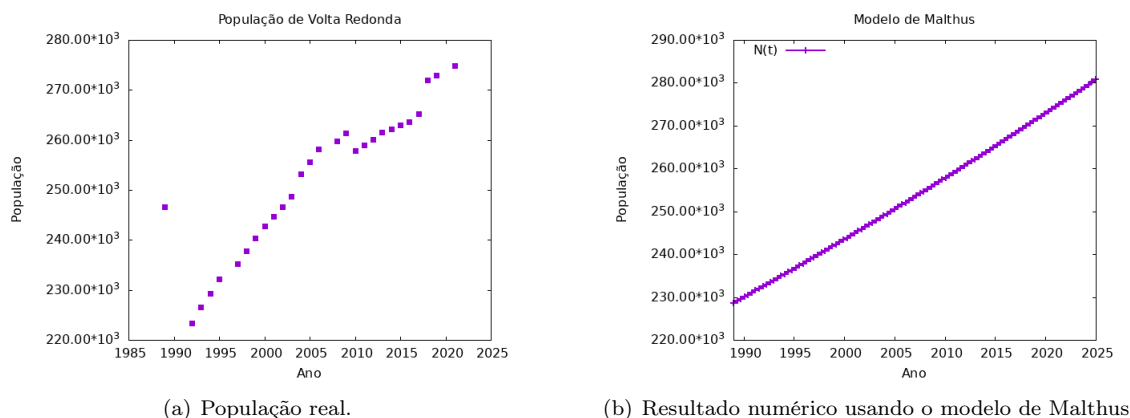


Figura 1: Gráficos da população de Volta Redonda em função do tempo. Fonte: Elaborado pelos autores.

Entre os anos analisados, vale destacar alguns aspectos relevantes, como o fato de que em meados da década de 90, a Companhia Siderúrgica Nacional (CSN) foi privatizada, o que pode ter impactado a população da cidade. Além disso, em 2010 houve alteração na metodologia utilizada pelo IBGE, o que pode explicar dados outliers na base de dados do instituto. Para o resultado final do trabalho, além da melhoria no modelo de Malthus será estimada a capacidade suporte da população, a fim de projetar a população de Volta Redonda através dos modelos de Verhulst e Montroll.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo financiamento deste projeto através da bolsa de iniciação científica (processo E-26/201.241/2024) e ao Instituto de Ciências Exatas, Campus Atterrado por ceder sua estrutura para a pesquisa.

Referências

- [1] R. C. Bassanezi. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3a. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2011. ISBN: 978-85-7244-207-7.
- [2] L. Edelstein-Keshet. **Mathematical Models in Biology**. 1a. ed. Philadelphia: SIAM, 2005. ISBN: 978-0-89871-554-5. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898719147>.
- [3] IBGE. **Dados dos anos de 1989, 1992-2000**. Online. Acessado em 03/03/2024, <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?=&t=downloads>.
- [4] IBGE. **Dados Referentes aos anos de 2001-2006, 2008-2009, 2011-2021**. Online. Acessado em 03/03/2024, <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6579>.