Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Modelo SIS Autônomo em Escalas Temporais

Patrick de S. Oliveira[1]
ICEx/UFMG, Belo Horizonte, MG
Lucy T. Takahashi[2] Eduard Toon[3]
DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

A teoria de escalas temporais, introduzida por Stefan Hilger em 1988 [1], apresenta-se como um estudo de análise generalista que abarca simultaneamente a análise discreta e contínua da reta, que fornece generalizações de derivada e de integral, as chamadas derivadas e integrais de Hilger. As equações envolvendo a derivada de Hilger são denominadas equações dinâmicas em escalas temporais. Essa teoria fornece uma ferramenta interessante para a modelagem epidemiológica, pois permite uma flexibilidade na escolha do domínio, $\mathbb{T}$, das soluções. O que permite a introdução de uma nova informação no modelo: o comportamento esperado da solução em certos intervalos abertos de tempo. $\mathbb{T}$ é dito uma escala temporal se é um subconjunto fechado e não-vazio de $\mathbb{R}$. Neste trabalho, como aplicação dessa teoria, apresentamos um modelo para o surto de gastroenterite aguda atribuído à contaminação pelo Astrovírus Sorotipo 1, ocorrido no ano de 2002 no município de Itatiaia, estado do Rio de Janeiro, Brasil [3]. Tomamos $\mathbb{T} = \bigcup \left\{7 + \frac{7}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\} \ \cup \ \left\{14,\ 14 + \frac{7}{2},\ 21,\ 21 + \frac{7}{2}, ...\right\}$ a escala temporal baseada na variação semanal do número de infectados pelo Astrovírus. Propomos o seguinte modelo SIS em escalas temporais

$$\begin{cases} S^{\Delta} = -\beta \dfrac{SI^{\sigma}}{S^{\sigma} + I^{\sigma}} - \alpha S + (\delta - \eta) I^{\sigma} + \alpha K, \\[2ex] I^{\Delta} = \beta \dfrac{SI^{\sigma}}{S^{\sigma} + I^{\sigma}} - \alpha I - (\delta - \eta) I^{\sigma}, \\[2ex] S_0 = S(t_0) > 0,\ I_0 = I(t_0) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

sendo f^{Δ} a derivada de Hilger de uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, σ um operador avanço tal que $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$, β é a taxa de contágio entre S e I, o termo $\beta SI^{\sigma}/(S^{\sigma} + I^{\sigma})$ representa o número de novos infectados oriundos destes encontros; os parâmetros positivos α e δ estão, respectivamente, relacionados com: a taxa de mortalidade/natalidade da população total e a taxa de recuperação dos indivíduos infectados; todos os parâmetros possuem escala $(dia)^{-1}$. O modelo (1) a princípio não é do tipo SIS clássico, mas após manipulações algébricas ele é equivalente matematicamente ao modelo SIS clássico proposto em [2], onde os infectados são gerados apenas pelo termo βSI^{σ}. Essa identificação nos permite utilizar parte dos resultados de análise do modelo desenvolvidos em [2], páginas 25-27, onde o enfoque é puramente matemático e não se considera as restrições biológicas. Desta forma, ao tomarmos $\delta - \eta - \beta, -\alpha \in \mathbb{R}^+$, com a função $\theta = (\delta - \eta - \beta) \ominus (-\alpha)$

[1]patrickoliveira@ice.ufjf.br
[2]ltiemi@gmail.com
[3]eduard.toon@ufjf.br

limitada, e $\delta + \alpha \neq \beta + \eta$, para (1), obtemos

$$\begin{cases} I(t) = \dfrac{I_0}{\left(1 + \dfrac{I_0}{N} \cdot \dfrac{\beta}{\delta - \eta + \alpha - \beta}\right) \cdot e_\theta(t, t_0) - \dfrac{I_0}{N} \cdot \dfrac{\beta}{\delta - \eta + \alpha - \beta}} \\ \\ S(t) = N - I(t), \end{cases} \tag{2}$$

solução única, para todo $t \in \mathbb{T}$ e dois pontos de equilíbrio

$$P_0 = (N, 0) \quad \text{e} \quad P_1 = \left(N_0 \frac{\delta - \eta + \alpha}{\beta}, N \frac{\beta - \delta + \eta - \alpha}{\beta} \right). \tag{3}$$

Ainda, se $\delta + \alpha \neq \eta$, tomando $Q := \beta/(\delta - \eta + \alpha)$, valem as afirmações:

(i) Se $Q < 1$, então o ponto de equilíbrio P_0 é assintóticamente estável para toda condição inicial $S_0, I_0 > 0$.

(ii) Se $Q > 1$, então o ponto de equilíbrio P_1 é assintóticamente estável para toda condição inicial $S_0, I_0 > 0$.

Alguns modelos epidemiológicos dentro da teoria clássica possuem algumas formas de se determinar o número básico de reprodutibilidade, R_0, ou pelo menos estimá-lo. Em escalas temporais ainda não existem tais recursos. Mas, a interpretação de Q no modelo é equivalente à do R_0. Por meio das simulações, comparando as soluções do modelo (1) com os dados empíricos disponíveis sobre o número de casos reportados de gastroenterite aguda [3], concluímos que, o modelo em escalas temporais descreve de forma satisfatória o surto. Pudemos concluir também que os parâmetros β, δ e η possuem uma forte relação linear, satisfazendo $\delta - \eta - \beta \approx 0,32$. Utilizando essa identidade, auxiliados novamente pelas simulações numéricas, em que estimamos $\beta \approx 0,18$, obtemos que $Q := \beta/(\delta - \eta) \approx \beta/(0,32 + \beta) = 0,36$. Esse valor de Q confirma a nossa expectativa inicial sobre a dinâmica desta doença, que tende a se extinguir da população.

As soluções explícitas do modelo (1) foram então obtidas e seus parâmetros estimados, de acordo com os dados sobre a evolução da doença, fornecidos em [3], e suas simulações corroboram os dados empíricos. Portanto, verifica-se a aplicabilidade das equações dinâmicas em escalas temporais como uma possível ferramenta de modelagem epidemiológica.

Agradecimentos

PSO, LTT e ET agradecem os apoios parciais da FAPEMIG (RED-00133-21) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] M. Bohner e A. Peterson. **Dynamic equations on time scales, An introduction with applications**. 1a. ed. Boston: Birkhäuser Boston, 2001. ISBN: 13. 978-0817642259.

[2] M. Bohner e S. Streitpert. “The SIS-Model on Time Scales”. Em: **Pliska Stud. Math.** 26 (2016), pp. 11–28.

[3] M.T. F. Lagrotta. **Investigação de surto de gastroenterite associado com o Astrovírus sorotipo 1, Itatiaia/RJ - Agosto de 2002**. Online. Acessado em 23/03/2024, `https://bvsms.saude.gov.br/bvs/periodicos/boletim_eletronico_epi_ano06_n01.pdf`.