Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Aproximação Escalada para DCT de Comprimento 16

L. M. F. de Oliveira[1]
Programa de Graduação em Engenharia de Produção, CAA, UFPE, Caruaru, PE
R. J. Cintra[2]
Signal Processing Group, Núcleo de Tecnologia, CAA, UFPE, Caruaru, PE

A transformada discreta do cosseno (DCT, *discrete cosine transform*) é uma ferramenta central em processamento digital de imagens devido a sua capacidade de descorrelacionar dados modelados por processos markovianos de tipo I, como é o caso de imagens naturais [2]. Algoritmos rápidos reduzem este custo computacional de $O(N^2)$ para $O(N \log N)$ [5]. Entretanto, em contextos de extrema escassez de recursos energéticos e computacionais, como em redes baseadas em *Internet of Things* [6], os algoritmos rápidos tradicionais não reduzem a complexidade suficientemente.

Uma abordagem para redução significativa da complexidade computacional é fornecida por meio de aproximações matriciais [5]. Uma aproximação matricial de baixa complexidade é uma matriz cujos elementos são multiplicandos triviais, e.g., elementos do conjunto $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. Assim, o problema de aproximar a matriz de transformação da DCT consiste em obter uma matriz de baixa complexidade computacional que preserve a propriedade de descorrelação de dados. Trata-se de um problema de otimização discreta sujeito a restrições sobre um espaço de busca finito, mas extremamente vasto. Por exemplo, para $N = 8$, há $\approx 10^{44}$ matrizes-candidatas. Em [5], foi introduzida uma metodologia baseada na aproximação individual de cada linha da matriz, reduzindo o espaço de busca para $\approx 10^6$ matrizes-candidatas.

Neste trabalho, adotamos uma variação da abordagem descrita em [5]. Em particular, (i) a restrição de ortogonalidade é relaxada e (ii) a etapa de permutação de linhas é substituída pela ordem natural das linhas das matriz. O ângulo entre vetores é mantido como distância entre linhas exatas e linhas aproximadas. Adicionalmente, introduzimos uma novidade ao método descrito em [5]. Para cada linha i, são separadas as K_i linhas-candidatas mais próximas da linha ótima num erro máximo de 0.1 rad, resultando em $\prod_{i=1}^{8} K_i = 8\,072\,064$ matrizes candidatas. Foram adotados o erro médio quadrático (MSE) [2], como função objetiva a ser minimizada; e, secundariamente, a eficiência de transformação (η) [2], a ser maximizada. Para $N = 8$, obtemos a seguinte matriz como solução ótima:

$$\mathbf{T}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Uma abordagem para se obter aproximações matriciais para N grande é por meio de *escalamento* matricial [3]. Neste contexto, um escalamento é um mapeamento matricial capaz de levar uma matriz de tamanho $N \times N$ em uma matriz de tamanho maior. Uma matriz escalada aproximada deve: (i) significativamente preservar a estrutura e as propriedades matemáticas da matriz original e (ii) apresentar baixa complexidade computacional. Em [3], é descrito um escalamento matricial para a DCT tipo II que dobra o tamanho da matriz de entrada. Assim, $\mathbf{T}_8$ é entendida como uma matriz primitiva ao escalamento que resulta na matriz $\mathbf{T}_{16}$ proposta.

[1] luis.miguelo@ufpe.br
[2] rjdsc@de.ufpe.br

Tabela 1: Comparação das medidas de avaliação de desempenho

Método	N	MSE	ϵ	C_g	η	δ
DCT (Exata) [2]	8	0.0000	0.0000	8.8259	93.9912	0.0000
OCBSML$_1$ [5]	8	0.0046	1.2194	8.6337	90.4615	0.0000
OCBSML$_2$ [5]	8	0.0127	1.2194	8.1024	87.2275	0.0000
LO [4]	8	0.0061	0.8695	8.3902	88.7023	0.0000
$\mathbf{T}_8$ (Proposta)	8	0.0013	0.6856	8.7549	92.4645	0.0255
DCT (Exata) [2]	16	0.0000	0.0000	9.4555	88.4518	0.0000
SBCKMK [7]	16	0.0630	30.3230	8.2950	70.8315	0.0000
SOBCM [8]	16	0.0947	40.9996	7.8573	67.6078	0.0000
WHT [2]	16	0.4284	92.5631	8.1941	70.6465	0.0000
BCEM [1]	16	0.0465	8.0806	7.8401	65.2789	0.0000
$\mathbf{T}_{16}$ (Proposta)	16	0.0776	13.4744	7.8040	60.3968	0.1728

Adicionalmente ao MSE e eficiência de transformação, as seguintes figuras de mérito foram consideradas para avaliar as matrizes obtidas: (i) erro total de energia (ϵ) [5]; (ii) ganho de codificação (C_g) [2, 5]; e (iii) desvio de ortogonalidade (δ) [5]. A Tabela 1 sumariza os resultados em comparação com a DCT exata e com aproximações em estado da arte.

Este trabalho introduz duas novas aproximações de baixa complexidade para a DCT de comprimento 8 e 16, exibindo desempenho competitivo e superando métodos da literatura.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo CNPq.

Referências

[1] F. M. Bayer et al. "A digital hardware fast algorithm and FPGA-based prototype for a novel 16-point approximate DCT for image compression applications". Em: **Meas. Sci. Technol.** (2012).

[2] V. Britanak, P. C. Yip e K. R. Rao. "Integer discrete cosine/sine transforms". Em: **Discrete cosine and sine transforms**. Elsevier, 2007, pp. 141–304.

[3] D. Coelho et al. "Low-complexity scaling methods for DCT-II approximations". Em: **IEEE Trans. Signal Process.** (2021).

[4] K. Lengwehasatit e A. Ortega. "Scalable variable complexity approximate forward DCT". Em: **IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.** (2004).

[5] R. S. Oliveira et al. "Low-complexity 8-point DCT approximation based on angle similarity for image and video coding". Em: **Multidimension. Syst. Signal Process.** (2018).

[6] H. Qiu et al. "Deep residual learning based enhanced JPEG compression in the internet of things". Em: **IEEE Trans. Ind. Inf.** (2020).

[7] T. L. T. da Silveira et al. "An orthogonal 16-point approximate DCT for image and video compression". Em: **Multidimension. Syst. Signal Process.** (2014).

[8] T. L. T. da Silveira et al. "Multiplierless 16-point DCT approximation for low-complexity image and video coding". Em: **Signal, Image and Video Processing** (2016).

