Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

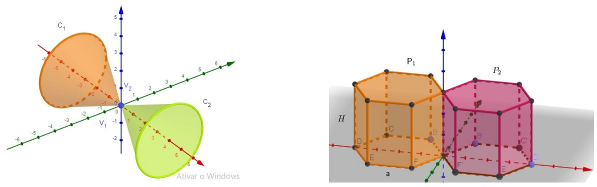
Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Abordagem Numérica para o Cálculo de Volumes de Interseção entre Sólidos Geométricos

Carlos A. M. de Sousa[1]
EEMTI Poeta Patativa do Assaré, Fortaleza, CE
Jocivania Pinheiro[2] Paulo C. L. da Silva[3]
UFERSA, Mossoró, RN

Conforme o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) mais recente, no ano de 2022, 73% dos estudantes brasileiros de 15 anos não tinham nível adequado de conhecimento em matemática [1], o que repercute nas etapas posteriores de aprendizagem. Tendo isso em vista, com o objetivo de apresentar um problema motivador para a aprendizagem de funções, o trabalho desenvolvido em [2], expõe um problema algébrico-geométrico, onde são construídas as funções que determinam o volume de interseção entre sólidos idênticos. Os sólidos escolhidos para esse resumo foram o cone e o prisma de base hexagonal. As situações em suas condições iniciais, analisadas no problema, estão ilustradas nas Figuras $1(a)$ e $1(b)$.



(a) Cones com eixos coincidente ao eixo x se aproximando a partir de seus vértices.

(b) Prismas regulares de base hexagonal com eixos paralelos ao plano xOy.

Figura 1: Estado inicial dos sólidos. Fonte: Autor.

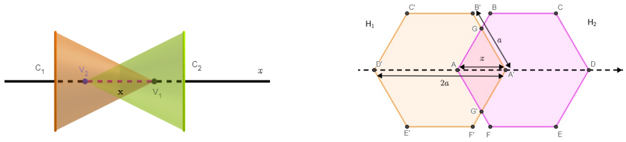
Considerando dois cones de altura H e raio R com seus eixos sobre o eixo x, como mostra a Figura $1(a)$, deslocaremos o Cone C_1 na direção de C_2, até que o segundo seja totalmente ultrapassado, isto é, até obtermos $x = 2H$, onde x é a variável que determina a distância entre os vértices V_1 e V_2 (deslocamento de C_1), veja a Figura $2(a)$. Feito os cálculo, obtemos

$$V_{I_C}(x) = \begin{cases} \frac{\pi R^2}{12H^2}x^3, & se\ 0 \leq x \leq H \\ \frac{\pi R^2}{12H^2}(-7x^3 + 24Hx^2 - 24H^2x + 8H^3), & se\ H < x \leq 2H \end{cases}. \tag{1}$$

Agora, sejam P_1 e P_2 dois prismas regulares de base hexagonal com lado da base medindo a, altura H e com uma das diagonais da base sobre o eixo x, como mostra a Figura $1(b)$. Deslocaremos o Prisma P_1 na direção de P_2, até que P_2 seja totalmente ultrapassado, ou seja, até obtermos $x = 4a$, sendo x a distância entre os vértices A e A'. Veja a Figura $2(b)$. Realizados os cálculos,

[1] carlos.sousa55000@alunos.ufersa.edu.br
[2] vaniamat@ufersa.edu.br
[3] linhares@ufersa.edu.br

$$V_{I_P}(x) = \begin{cases} \frac{H\sqrt{3}}{2}x^2, & se \quad 0 \leq x \leq a \\ Ha\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{2}\right), & se \quad a < x \leq 2a \\ Ha\sqrt{3}\left(\frac{7a}{2} - x\right), & se \quad 2a < x \leq 3a \\ \frac{H\sqrt{3}(4a-x)^2}{2}, & se \quad 3a < x \leq 4a \end{cases}. \tag{2}$$

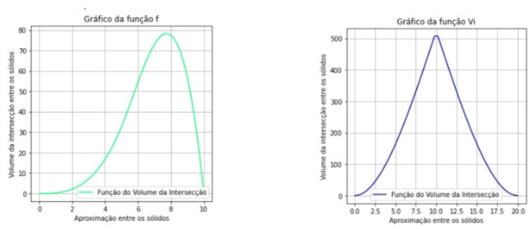


(a) Cones C_1 e C_2

(b) Prismas P_1 e P_2

Figura 2: Seção da interseção entre os cones e os prismas em aproximação. Fonte: Autor.

Para analisar o comportamento do volume dessa região de intersecção, fez-se o gráfico das funções (1) e (2) utilizando a linguagem de programação Python devido a sua versatilidade. Na Figura 3(a) foram considerados $R = 5$ e $H = 5$ e na Figura 3(b) foram considerados $a = 6$ e $H = 5$.



(a) Gráfico da função V_{I_C}.

(b) Gráfico da função V_{I_P}.

Figura 3: Gráficos das funções do volume das interseções. Fonte: Autor.

No caso do cone, a função é crescente enquanto a região de interseção são dois cones, ou seja, quando $x < 1,54H$, passando a dois troncos de cones até atingir o seu máximo, quando $x = 1,54H$, aproximadamente, depois decresce. Quanto ao prisma de base hexagonal, a função é crescente enquanto o prisma P_1 se aproxima de P_2, quando $x < 2a$, até atingir o valor máximo, ou seja, quando $x = 2a$, com os prismas coincidindo, a partir disso, para $x > 2a$, a função é decrescente. A região de interseção terá o formato de um prisma quadrangular (losango) para $x \leq a$. Se $a \leq x \leq 3a$, a região de interseção terá o formato de um prisma hexagonal e quando $3a \leq x < 4a$, a região de interseção terá o formato de um prisma quadrangular novamente.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio da UFERSA no desenvolvimento desse trabalho.

Referências

[1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Divulgados os resultados do PISA 2022**. Online. Acessado em: 02/03/2024, `https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022`.

[2] C. A. M. de Sousa. “Uma abordagem metodológica para o cálculo de volumes de interseção entre sólidos utilizando a linguagem Python”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Semiárido, 2023.