Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Grafos Associados a Álgebras de Evolução e Derivações

Tiago Reis[1]
DAMAT/UTFPR, Cornélio Procópio, PR

As álgebras de evolução são álgebras não associativas inspiradas em fenômenos biológicos com aplicações e conexões com vários campos da matemática. Essas álgebras foram introduzidas por Tian e Vojtechovstky [8] em 2016. Em [7], Tian identifica uma série de conexões dessas álgebras com diversas áreas de pesquisa, como Genética, Teoria de Grupos, Cadeias de Markov e Teoria de Grafos. Em 2015, Elduque e Labra [5] apresentam uma nova forma de associar uma álgebra de evolução a um grafo orientado e a partir disso estudar propriedades dessas álgebras utilizando a estrutura do grafo associado. Para certas condições, provou-se, por exemplo, que a irredutibilidade da álgebra é totalmente caracterizada pelo conexidade do grafo associado. Essa construção proposta por Elduque e Labra é de especial interesse neste trabalho.

Vários estudos recentes se concentram nessa classe de álgebras, em particular, destacamos o seguintes trabalhos, que caracterizam o espaço das derivações das álgebra de evolução: [3–6]. Neste trabalho, apresentaremos alguns resultados presentes em [2]. Tais resultados se dedicam a caracterizar o espaço das derivações de álgebras de evolução, utilizando como principal ferramenta o grafo associado a uma álgebra de evolução.

Vejamos algumas definições preliminares. Denotaremos por $\mathbb{K}$ um corpo de característica zero. Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita é chamada de **álgebra de evolução** se admite uma base $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$ tal que $e_ie_j = 0$ sempre que $i \neq j$. Uma base com tal propriedade é chamada de **base natural**. Os escalares $\omega_{ij} \in \mathbb{K}$ tais que $e_i^2 = \sum_{k\in\Lambda} \omega_{ik}e_k$ são chamados de **constantes de estrutura** de $\mathcal{A}$ relativas a B e a matriz $M_B = (\omega_{ik})$ é chamada de **matriz de estrutura** de $\mathcal{A}$ relativa a B. Uma álgebra de evolução é perfeita se $A^2 = A$. A definição de grafo associado a seguir foi proposta em [5].

Definição 1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução, $B = \{e_i;\ i \in \Lambda\}$, com $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, uma base natural de $\mathcal{A}$ e $M_B = (w_{ij})$ a matriz de estrutura de $\mathcal{A}$ relativa à base B. O grafo orientado associado a $\mathcal{A}$ (relativo à base B), denotado por $\Gamma(\mathcal{A}, B)$, é o grafo cujo conjunto de vértices é $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ e cuja matriz de adjacência é $P = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$, onde*

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ w_{ij} = 0, \\ 1, & se\ w_{ij} \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Logo $\Gamma(\mathcal{A}, B) = (\Lambda, E)$, onde $E = \{(i, j) \in V \times V;\ w_{ij} \neq 0\}$.

Destacamos dois resultados que serão importantes neste trabalho. O primeiro é o Teorema 1 de [3] que afirma que o espaço de derivações de uma álgebra de evolução não degenerada cujo grafo associado é livre de gêmeos é nula. O segundo é o Teorema 2.1 de [1] que afirma que o espaço de derivações de uma álgebra de evolução perfeita é nula. Em [2] provamos a proposição a seguir, que, como discutiremos, generaliza os dois resultados supracitados. Utilizaremos a notação $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ para o espaço das derivações da álgebra $\mathcal{A}$, o espaço das transformações lineares que respeitam a identidade de Leibniz.

[1]treis@utfpr.edu.br

Proposição 1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada tal que* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \{0\}$*. Então $\mathcal{A}$ não tem base natural única.*

Observe que a proposição anterior é equivalente a dizer que se $\mathcal{A}$ tem a base natural única então então $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Visto que toda álgebra de evolução perfeita e toda álgebra de evolução que é livre de gêmeos tem base única, então a Proposição 1 é uma generalização do Teorema 2.1 de [1] e também do Teorema 1 de [3]. Além disso, se considerarmos a álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural B tal que

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

observamos que $\mathcal{A}$ tem base natural única, logo a Proposição 1 nos garante que $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Observe ainda que $\mathcal{A}$ não é perfeita e tampouco livre de gêmeos, o mostra que a Proposição 1 é mais geral.

Em [2] também apresentamos alguns outros resultados que caracterizam do espaço de derivação de álgebras de evolução, especialmente voltados para a caracterização das álgebras de evolução de Volterra (cuja matriz de estrutura é antissimétrica). Além disso, apresentamos o conceito de laços de uma álgebra de evolução (inspirado pelo conceito de laços de um grafo) e mostramos critérios para que a quantidade de laços seja preservada pelo troca da base natural.

Agradecimentos

Agradeço a Dra. Paula Cadavid da UFRPE - Universidade Federal Rural do Pernambuco e a Dra. Yolanda Cabrera Casado da Universidade de Málaga, que foram coautoras do artigo que deu origem a este trabalho.

Referências

[1] L. M. Camacho, J. R. Gómez, B.A. Omirov e R.M. Turdibaev. “The derivations of some evolution algebras”. Em: **Linear and Multilinear Algebra** 61.3 (2013), pp. 309–322.

[2] Y. C. Casado, P. Cadavid e T. Reis. “Derivations and loops of some evolution algebras”. Em: **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas** 117.3 (2023), p. 119.

[3] Y. C. Casado, P. Cadavid, M. L. Rodiño Montoya e P. M. Rodriguez. “On the characterization of the space of derivations in evolution algebras”. Em: **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)** 200.2 (2021), pp. 737–755.

[4] Y. C. Casado, M. Kanuni e M. S. Molina. “Basic ideals in evolution algebras”. Em: **Linear Algebra and its Applications** 570 (2019), pp. 148–180.

[5] A. Elduque e A. Labra. “Evolution algebras and graphs”. Em: **Journal of Algebra and its Applications** 14.07 (2015), p. 1550103.

[6] T. Reis e P. Cadavid. “Derivations of evolution algebras associated to graphs over a field of any characteristic”. Em: **Linear and Multilinear Algebra** 70.15 (2022), pp. 2884–2897.

[7] J. P. Tian. **Evolution algebras and their applications**. Springer, 2008.

[8] J. P. Tian e P. Vojtechovsky. “Mathematical concepts of evolution algebras.” Em: **Mendelian genetics Quasigroups Related Systems.** 14 (2006), pp. 111–122.