Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Movimento Browniano Fracionário: Vantagens e Limites na Modelagem de Mercados Financeiros

Vitor C. Ramalho[1]
DM/UFJF, Juiz de Fora, MG

Chamamos de **movimento browniano fracionário** (mBf) um processo estocástico gaussiano $B_t^H(\omega) = \{B^H(t)\}_{t\geq 0}$ com média zero e função de covariância dada por

$$\mathbf{E}\left[B^H(t)B^H(s)\right] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \tag{1}$$

onde o parâmetro $0 < H < 1$ é conhecido como **índice de Hurst**.

Esse processo foi introduzido pela primeira vez em um espaço de Hilbert por Kolmogorov em 1940, onde foi chamado de **Hélice de Wiener**. O nome "movimento browniano fracionário"é devido a Mandelbrot e Van Ness, que em 1968 forneceram, em [5], uma representação deste processo como uma integral fracionária de Weyl com medida semi-martingale em termos de um movimento browniano padrão. Já o índice de Hurst, nomeado por Mandelbrot em [5], faz homenagem ao Hidrólogo britânico Harold Hurst, que introduziu a **análise de intervalo redimensionado** ou **análise** R/S, em [4], ao estudar a variação anual do nível das águas do sistema do rio Nilo.

O mBf apresenta propriedades relevantes para a modelagem de muitas situações reais. Destacam-se, entre elas, a dependência de longo alcance e a propriedade de autossimilaridade. Primeiramente, considerando os incrementos, $B_t^H - B_{t-h}^H$ e $B_{s+h}^H - B_s^H$, onde $s+h \geq t$ e $t-s = (n+1)h$. Denotando por $\rho_H(n)$ a função de covariância (1) para incrementos

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}]. \tag{2}$$

De (2) observamos que, se $H > 1/2$ a correlação entre os incrementos é positiva, se $H = 1/2$ os incrementos são independentes e se $H < 1/2$ a correlação é negativa. Segue, ainda, de (2) o limite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_H(n)}{H(2H-1)n^{2H-2}} = 1, \tag{3}$$

de onde concluímos que B_t^H possui dependência de longo alcance.

Já a propriedade de autossimilaridade é o que confere ao mBf sua característica de fractal estatístico. Entendemos como propriedade autossimilar a seguinte afirmação: Para qualquer constante $a > 0$, os processos $\{a^{-H}B_{at}, t \geq 0\}$ e $\{B_t, t \geq 0\}$ têm a mesma distribuição. Esta propriedade é consequência imediata do fato da função de covariância (1) ser homogênea de ordem $2H$. É possível mostrar que a dimensão fractal D da trajetória de um mBf unidimensional é relacionada com o índice de Hurst pela fórmula, $D = 2 - H$.

Essas propriedades tornam o mBf um modelo de ruído adequado em diferentes aplicações, como matemática financeira, biomatemática, análise de tráfego de rede e hidrologia. No âmbito da modelagem de mercados financeiros, a vantagem adquirida com a propriedade de dependência

[1]vitocr5@hotmail.com

de longo alcance, trouxe consigo uma limitação significativa, a presença aparentemente inevitável de oportunidades de arbitragem. A presença de arbitragem no modelo contradiz a hipótese de eficiência do mercado, uma das principais hipóteses na teoria financeira. Mesmo que modelos baseados na integral de Wick-Itô, como em [3], pareçam contornar esse problema, Bjork e Hult, evidenciaram em [1] que tais modelos fazem uso de definições que carecem de significado econômico.

Uma outra dificuldade aparece na incompatibilidade de modelos baseados no mBf com a hipótese da tratabilidade contínua. Isto é, a suposição de que investidores individuais são capazes de negociar continuamente. Em [7], Rostek e Schöbel demonstram por um análogo fracionário aos argumentos apresentados em [8] que independente do cálculo de integração aplicado, o hedge contínuo elimina o risco e, portanto, torna os preços das opções determinísticos. Cheridito em [2] demonstra que se um único investidor não puder realizar duas transações consecutivas em um intervalo de tempo infinitesimal, o mercado pode ser considerado como livre de arbitragem, uma vez que os investidores não terão acesso a essas oportunidades.

No entanto, essa condição resulta em um mercado dinamicamente incompleto, isto é, a ausência de arbitragem garantida por essa restrição não pode ser aproveitada como em um modelo livre de arbitragem para precificação de opções pois estratégias dinâmicas de hedge que envolvem um ajuste contínuo da carteira de replicação não são mais permitidas.

Neste trabalho, além da caracterização de Mandelbrot e Van Ness, visamos o estudo das principais propriedades do movimento browniano fracionário, seguindo [5, 6]. Mostraremos como é necessário o desenvolvimento de um cálculo estocástico específico para o tratamento de modelos baseados no mBf, uma vez que esse processo não é um semi-martingale e não podemos usar o cálculo clássico de Itô. Além disso, discutiremos a presença de arbitragem em modelos de mercado fracionários e a não compatibilidade desses modelos com a hipótese de tratabilidade contínua.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial da FAPEMIG, da Pró-Reitoria de Graduação da UFJF e a Rede Mineira de Matemática (RED-00133-21).

Referências

[1] T. Bjork e H. Hult. “A note on Wick products and the fractional Black–Scholes model.” Em: **Finance and Stochastics** (2005), pp. 197–209.

[2] P. Cheridito. “Arbitrage in fractional Brownian motion models.” Em: **Finance and Stochastics** (2003), pp. 533–553.

[3] Y. Hu e B. Øksendal. “Fractional white noise calculus and applications to finance”. Em: **Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat.** (2003), pp. 1–32.

[4] H. E. Hust. “Long term storage capacity of reservoirs”. Em: **Trans. Am. Soc. Eng.** (1951), pp. 770–799.

[5] B. Mandelbrot e J. Van Ness. “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”. Em: **SIAM Review 10.** (1968), pp. 422–437.

[6] D. Nualart. “Stochastic Integration with Respect to Fractional Brownian Motion and Applications.” Em: **Contemp. Math.** (2002).

[7] S. Rostek e R. Schöbel. “A note on the use of fractional Brownian motion for financial modeling”. Em: **Economic Modelling** ((2013)), pp. 30–35.

[8] S.P. Sethi e J.P. Lehoczky. “A comparison of the Itô and Stratonovich formulations of problems in finance.” Em: **Journal of Economic Dynamics and Control** ((1981)), pp. 343–356.

