Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simulações Númericas para a Equação de Schrödinger Não Linear e Não Homogênea

Caio M. de Oliveira[1], Denise B. Duczmal[2], Luccas C. Campos[3]
DMAT/UFMG, Belo Horizonte, MG

A equação de Schrödinger linear pode ser vista como uma contraparte *(counterpart)* quântica da Segunda Lei de Newton por ser capaz de descrever a evolução temporal de uma função de onda num sistema mecânico quântico isolado [4]. Entretanto, tal descrição pode não ser satisfatória a depender do tipo de onda e do meio de propagação considerados. Dado isso, são introduzidas algumas modificações na equação de Schrödinger linear para descrever o caso de ondas não lineares em meios dispersivos. De tais modificações surge uma nova classe de equações: as do tipo Schrödinger não linear e não homogêneo (INLS) e que são utilizadas, por exemplo, para descrever a propagação de ondas de luz em meios não lineares ou a dinâmica de um condensado de Bose-Einstein [1] [7].

As equações assim nomeadas juntamente com seus Problemas de Valor Inicial correspondentes são da forma:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}|u|^{2\sigma}u = 0, x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ u(.,t) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{1}$$

Considerando $b = 0$ estamos no caso da Equação de Schrödinger não linear homogênea (NLS) a qual possui vasta literatura analítica a seu respeito e que modela a propagação de feixes de laser em um meio maciço *(bulk medium)* em que o índice de refração depende da intensidade do campo elétrico. Por sua vez obtemos a equação de Schrödinger não linear e não homogênea (INLS) quando $\sigma > 0$, $b > 0$, que é o caso em que estamos interessados neste presente trabalho.

No contexto das equações diferenciais parciais não lineares a teoria sobre a sua boa colocação ainda está em desenvolvimento e este é o caso da INLS, a qual possui uma lacuna analítica sobre a sua boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^d)$ para certos parâmetros, como por exemplo $d = 1, 2$, em que se espera haver boa colocação para quaisquer $\sigma > 0$ e $0 \leq b < d$, mas atualmente isso se verifica analiticamente apenas para o caso $0 \leq b < \frac{d}{2}$ [5]. Similarmente para $d = 3$ espera-se que haja boa colocação para $0 \leq b < 2$, mas só se conhecem resultados analíticos para $0 \leq b < \frac{3}{2}$ [2].

Nosso objetivo no presente trabalho é simular as equações do tipo INLS para diferentes parâmetros e diversas condições iniciais em domínios de dimensão baixa, mais notadamente $d = 1, 2, 3$, utilizando métodos numéricos desenvolvidos na linguagem de programação *C++* e assim fazer previsões sobre boa colocação e verificar em quais condições é possível observar numericamente os fenômenos de explosão *(blowup)* e espalhamento *(scattering)* em soluções radiais de (1). Em vista disso, utilizamos o método de diferenças finitas desenvolvido em [3] a fim de obtermos conservação de massa e energia e adequação à singularidade $x = 0$ e também a interação de Petviashivilli [6] para calcular o estado fundamental *(ground state)*.

[1]caio-monteiro@ufmg.br
[2]bulgarelli@ufmg.br
[3]luccas@ufmg.br

Agradecimentos

À Universidade Federal de Minas Gerais e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), através do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME-UFMG).

Referências

[1] M. J. Ablowitz. **Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems**. Vol. 302. Cambridge University Press, 2004.

[2] L. C. Campos. "Scattering of radial solutions to the inhomogeneous nonlinear Schrödingerequation". Em: **Nonlinear Anal.202** Paper No. 112118, 17 (2021). ISSN: 0362-546X. DOI: 0.1016/j.na.2020.112118.

[3] L. C. Campos, S. Roudenko e K. Yang. "On numerical simulations regarding well-posedness and scattering for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: **Preparação**. 2024.

[4] D. J. Griffiths. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2a. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN: 0131118927.

[5] C. M. Guzmán. "On well posedness for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: **Nonlinear Anal. Real World Appl.** 37 (2017), pp. 249–286. ISSN: 1468-1218.

[6] D. E. Pelinovsky e Y. A. S. Tepanyants. "Convergence of Petviashvili's iteration method for numerical approximation of stationary solutions of nonlinear wave equations". Em: **SIAM J. Numer. Anal.** 42(3):1110–1127 (2004). ISSN: 0036-1429. DOI: 10.1137/S0036142902414232.

[7] J. Yang. **Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems**. 1a. ed. Philadelphia: SIAM, 2010. ISBN: 0898717051.

