

Estratégias PID e LQR Aplicados ao Controle de Posição de um Robô Autoequilibrante

Ana P. M. da Silva,¹ Cleberson A. da Silva,² João V. B. Pontes,³ Reinel B. Aguedo,⁴ Ania L. Cervantes⁵

UFRPE/UACSA, Cabo de Santo Agostinho, PE

Este trabalho apresenta a modelagem matemática e a resposta do sistema utilizando os controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) e LQR (Regulador Quadrático Linear) para um protótipo baseado no pêndulo invertido, sendo esse um sistema dinâmico muito sensível a perturbações, composto basicamente por uma haste vertical com massa na extremidade superior, conectada a um carrinho motorizado.

Dessa forma, segundo [1], a representação no **espaço de estados** do pêndulo em relação ao sinal de controle (u) aplicada ao robô, considerando os vetores de estados e das saídas do sistema, respectivamente, como $x = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^T$ e $y = [y_1 \ y_2]^T = [x_1 \ x_3]^T = [\theta \ x]^T$, fornece uma relação direta entre o deslocamento do eixo horizontal (x) e movimento angular da haste (θ) e pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u, \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que, os parâmetros presentes das equações (1) e (2) são: massa total ($M = 0,418 \text{ kg}$), massa do centro de massa ($m = 0,301 \text{ kg}$), altura do centro de massa ($l = 0,1175 \text{ m}$) e aceleração da gravidade ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$).

Sobre os controladores, vale destacar o PID, que é o algoritmo de controle de processo mais amplamente usado na indústria [1] e pode ser expresso, no domínio do tempo, e em função do erro do sistema, $e(t)$, como:

$$u(t)_{PID} = K_P e(t) + K_I \int e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (3)$$

em que K_P é o ganho proporcional, K_I é o ganho integrativo e K_D é o ganho derivativo.

Já o LQR se fundamenta no controle ótimo de malha fechada por meio da retroação de estados, no qual se objetiva encontrar uma matriz de ganhos K ótima, escolhendo as características de malha fechada, importantes para a determinação da estabilidade e do desempenho do sistema,

¹paula.pe.martins@gmail.com

²clebersonandrade1@gmail.com

³jvictorborges.pontes@gmail.com

⁴reinel.beltran@ufrpe.br

⁵ania.lusson@ufrpe.br

assim como, também, do quanto esforço é necessário para obter esse desempenho ótimo [1]. Ao resolver o problema LQR, obtém-se a matriz de ganho, que minimiza o índice de desempenho e, dessa forma, pode-se obter o sinal (esforço) de controle, dado por:

$$u(t)_{LQR} = -Kx(t). \tag{4}$$

Mediante a análise das equações no espaço de estados, equações (1) e (2), e utilizando o *Matlab/Simulink* para realizar as análises e simulação, foi possível observar que o sistema é de estado completamente controlável e observável. Logo, é possível realizar a alocação arbitrária dos polos e projetar um observador de ordem plena e, posto isso, vários parâmetros atendem de maneira satisfatória os critérios de estabilidade. Dessa forma, realizando a sintonia de forma arbitrária, para ambas as estratégias de controle, obteve-se os valores simulados e experimentais para o PID de $K_P = -70$, $K_I = -1,4$ e $K_D = -280$ e para a matriz de realimentação para o LQR de $K = [-2628 \quad -218,9 \quad -31,6 \quad -10,5]$.

Logo, a Figura 1, apresenta as respostas do sistema simulado e experimental com controlador PID e a resposta simulada com o controlador LQR.

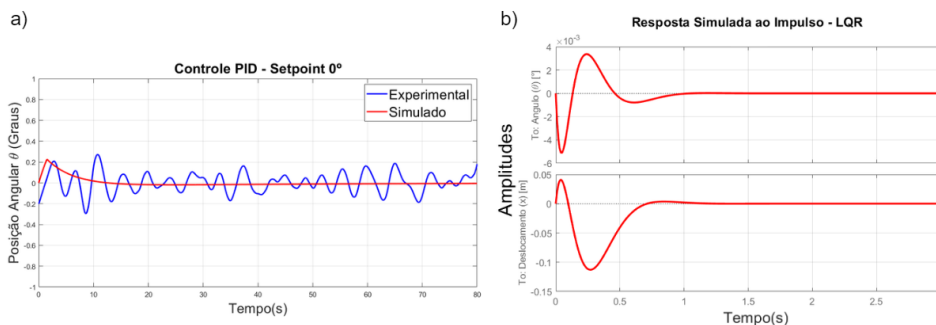


Figura 1: Resultados do Robô Autoequilibrante. a) resultados simulado e experimental do protótipo para o controlador PID. b) resultado simulado para o controlador LQR. Fonte: Produzida pelos Autores.

Torna-se evidente, portanto, que foi possível estabilizar o sistema de forma adequada, para a simulação de ambos controladores, em que para o PID, a posição angular do sistema variou em cerca de $0,2^\circ$ em torno da posição de equilíbrio e o tempo de acomodação foi de cerca de 6 segundos. Já o LQR, apresentou um máximo sobressinal de $0,004^\circ$ e tempo de acomodação de 0,7 segundos, aproximadamente, sendo este o controlador de melhor desempenho simulado. Contudo, não se conseguiu implementar o LQR de maneira experimental, já que mesmo o sistema controlado se mostrando estável nas simulações, ainda, na prática, apresentou certa instabilidade, pelo que se faz necessário um estudo mais aprofundado do protótipo neste sentido.

Agradecimentos

Agradecemos aos nossos dedicados orientadores pela oportunidade, experiência e apoio, indispensáveis para superação dos desafios e aperfeiçoamento deste trabalho. Assim como, à UFRPE, em especial à UACSA.

Referências

[1] K. Ogata. **Engenharia de Controle Moderno**. 5^a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.