Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método das Diferenças Finitas aplicado em Equações Diferenciais de Segunda Ordem na Análise de Corrente em Circuitos RLC

Yan G. A. Felipe[1] Thamyrys M. Azevedo[2] Matheus da S. Menezes[3] Ivan Mezzomo[4]
Stefeson B. Melo[5]
CCEN/UFERSA, Mossoró, RN

O estudo das Equações Diferenciais é um campo que aborda uma variedade de modelos físicos aplicados, dentre os quais o circuito elétrico RLC está inserido. Entre os diferentes tipos de equações diferenciais, estão as equações diferenciais ordinárias (EDOs), que envolvem apenas uma variável independente [1]. A solução de uma EDO resulta em uma família de curvas, podendo ser reduzida a uma solução específica por meio de um problema de valor inicial (PVI) [2]. Este trabalho tem como objetivo avaliar a eficácia do Método das Diferenças Finitas (MDF) na resolução de EDOs de segunda ordem dentro do contexto da medição da corrente em um circuito RLC fundamental. Isso é feito considerando as características físicas desses circuitos e as relações estabelecidas pela análise dos mesmos. Analisamos o MDF como uma alternativa não analítica para resolver EDOs, mantendo um nível de precisão previamente definido.

O MDF é uma abordagem que envolve a discretização dos domínios nos quais as equações diferenciais ordinárias (EDOs) estão definidas em vários pontos sequenciais n espaçados por uma distância h. Nesse contexto, o MDF pode ser empregado para realizar aproximações das derivadas em pontos da função de ordem zero, utilizando conceitos como a expansão da série de Taylor. Essa expansão é aplicada em torno do ponto desejado no domínio discretizado, seguindo a forma:

$$f[n \pm 1] = f[n] \pm hf'[n] + \frac{h^2}{2} f^2[n] \pm \frac{h^3}{6} f^3[n] + \frac{h^4}{24} f^4[n] \pm ... \tag{1}$$

Em nosso caso de estudo, será considerado o circuito RLC em série, considerando a resposta natural. A partir da análise das leis de Kirchhoff, esse sistema gera uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem, que é controlada pela energia armazenada no capacitor ($v_0 = v_c(0)$) e no indutor ($i_0 = i(0)$), ou seja, as condições iniciais para a solução específica da EDO [3]. No entanto, para o MDF clássico, isso não pode ser aplicado diretamente, pois as duas condições iniciais não estão no mesmo domínio. Nesse sentido, é necessário inicialmente transformar a EDO em sua versão discretizada. Começando pela expansão em série de Taylor, temos:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{i[n+1] - 2i[n] + i[n-1]}{h^2} + \frac{R}{L}\frac{i[n+1] - i[n]}{h} + \frac{i[n]}{LC} = 0 \tag{2}$$

Neste ponto pode ser realizada a manipulação da equação (2) para encontrar uma solução na forma iterativa, onde pontos da solução serão calculados a partir de dois pontos anteriores, conforme equação a seguir:

[1]yan.felipe@alunos.ufersa.edu.br
[2]thamyrys.azevedo@alunos.ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

$$i[n+1] = \frac{k_1 i[n] - k_2 i[n-1]}{k_3}; k_1 = \frac{2}{h^2} + \frac{R}{Lh} - \frac{1}{LC}, k_2 = \frac{1}{h^2}, k_3 = \frac{1}{h^2} + \frac{R}{Lh} \quad (3)$$

A aplicação do método não pode ser realizada devido aos valores de contorno estabelecidos, onde apenas um deles está definido na função $i[n]$. Portanto, será utilizada a aproximação discreta da primeira derivada e do modelo físico da tensão no capacitor, juntamente com as leis de Kirchhoff, para calcular $i[-1]$ (ponto teórico). Então:

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{-(Ri_0 + v_0)}{L} = \frac{i_0 - i[n-1]}{h} \quad (4)$$

Manipulando a equação (4), chegamos ao seguinte resultado equivalente:

$$i[n-1] = \frac{-h(Ri_0 + v_0)}{L} + i_0 \quad (5)$$

Para este trabalho será feito comparação do resultado da resolução analítica da EDO com os resultados obtidos pelo MDF, utilizando três diferentes níveis de discretização, $N_1 = 50$, $N_2 = 500$, $N_3 = 50000$. Para a aplicação será estabelecido um intervalo de tempo de $[0 : 0,001s]$ e $v_0 = 100V$, $i_0 = 0A$, $L = 10mH$, $C = 0,1\mu F$. Para conseguir contemplar os 3 formatos de resposta para EDO serão estabelecidos três casos onde serão aplicados os valores$R_a = 3k\Omega$, $R_b = 2k\Omega$, $R_c = 1k\Omega$ nas equações (3) e (5). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2.

Tabela 1: Erros calculados com relação ao número de pontos N e tamanho de passo h.

N e h	Valor de N e h	Tipo de erro	caso a	caso b	caso c
N_1	50	Erro médio percentual	$22,23\%$	$41,19\%$	$20,04\%$
h_1	$1,9608 \times 10^{-1}$ seg	Erro máximo absoluto	$6,46 \times 10^{-3}$	$6,41 \times 10^{-3}$	$5,57 \times 10^{-3}$
N_2	500	Erro médio percentual	$2,83\%$	$3,58\%$	$6,14\%$
h_2	$1,9960 \times 10^{-6}$ seg	Erro máximo absoluto	$8,11 \times 10^{-4}$	$7,44 \times 10^{-4}$	$5,97 \times 10^{-4}$
N_3	50000	Erro médio percentual	$0,04\%$	$0,04\%$	$0,09\%$
h_3	2.0000×10^{-8} seg	Erro máximo absoluto	$9,12 \times 10^{-6}$	$7,58 \times 10^{-6}$	$6,03 \times 10^{-6}$

A análise dos dados na Tabela 2 indica que a aplicação do Método das Diferenças Finitas (MDF) é adequada para resolver esse tipo de problema. As aproximações geradas foram capazes de representar com precisão as funções originais, apresentando um erro percentual médio inferior a 5% para $N = 500$. Conforme a discretização do conjunto aumenta, o erro diminui proporcionalmente, porem não houve um padrão de redução do erro entre os casos ao diminuir o tamanho do passo. Uma explicação possível está relacionada ao formato da curva de solução, que varia de acordo com os parâmetros do problema.

Tabela 2: Equações encontradas pelo método analítico.

caso a	caso b	caso c
$0.0447214e^{-26180.3t} - 0.0447214e^{-3819.88t}$	$-1000te^{-10000}$	$-0.11547e^{-5000t}\sin(8660.25t)$

Referências

[1] J. Stewart. **Cálculo**. 7a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. 10a. ed. São Paulo: CENGAGE, 2015.

[3] J. W. Nilsson. **Circuitos elétricos**. Trad. por Sonia Midori Yamamoto. 10a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015. Cap. 8.