

Bifurcações no Controle de um Conversor Boost Bidirecional Operando em uma Microrrede CC

Daniel J. Pagano, Rony Cristiano

Depto de Automação e Sistemas, DAS, UFSC

Campus Trindade

88040-900, Florianópolis, SC

E-mail: daniel.pagano@ufsc.br, rony.cristiano@ufsc.br

Resumo: Este artigo apresenta uma análise de bifurcações de um conversor de eletrônica potência boost bidirecional, considerando uma estratégia de controle por modos deslizantes (SMC) para microrredes de corrente contínua (cc) em modo ilhado. Esta análise tem por objetivo identificar fenômenos ligados às bifurcações dos equilíbrios que possam levar o sistema a uma instabilidade ou estabilidade num ponto de equilíbrio (ou órbita periódica) não desejado, e com isso, determinar condições sobre os parâmetros para garantir estabilidade e robustez do sistema.

Palavras-chave: Microrredes, Conversor boost bidirecional, sistemas dinâmicos DPWS, análise de bifurcações.

1 Introdução

Microrredes (MRs) são sistemas de distribuição de energia de corrente alternada (ca) ou corrente contínua (cc) compostos por células solares fotovoltaicas (PV), geradores eólicos, células de combustível e elementos de armazenamento de energia como por exemplo baterias, e cargas lineares e não lineares. Em destaque, as MRs cc são uma opção para novas demandas por qualidade de energia e integração de fontes renováveis no sistema elétrico [7].

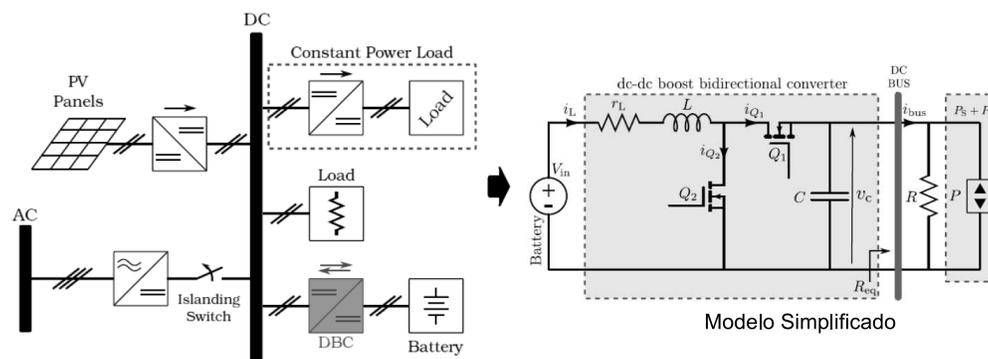


Figura 1: Modelo de uma Microrrede CC operando em modo ilhado.

Na dinâmica da MR cc, conversores no ponto de carga são modelados como *Constant Power Loads-CPLs* ($P_L > 0$) e cargas diretamente conectadas ao barramento como cargas resistivas (R). As fontes (solar, eólica, etc.) conectadas ao barramento cc, são modeladas como fontes de potência ($P_S < 0$) e a bateria é considerada uma fonte de tensão cc ideal (V_{in}). A MR no modo ilhado (microrrede isolada da rede principal, na figura 1 da rede ca) e o modelo simplificado do

conversor boost bidirecional conectado a uma bateria na microrrede cc estão ilustrados na figura 1. A potência gerada e a consumida pela CPL podem ser modeladas como $P = P_S + P_L$. Assim, o conversor bidirecional (DBC) tem o papel de controlar o balanço de potência entre geração e demanda de carga, utilizando a bateria para drenar ou injetar potência na rede.

Os conversores de potência são modelados matematicamente por sistemas dinâmicos DPWS (*Discontinuous Piece-Wise Smooth*). O correspondente modelo matemático é um conjunto de equações diferenciais ordinárias, caracterizado por algumas descontinuidades no próprio campo vetorial. Estas descontinuidades aparecem apenas em um pequeno subconjunto do espaço de estados e geralmente tal subconjunto é uma variedade suave genericamente transversal ao campo vetorial. Esta classe de sistemas pode apresentar órbitas deslizantes que são confinadas à superfície de comutação (ou superfície de descontinuidade, ou fronteira de comutação), [4].

Sistemas dinâmicos DPWS podem exibir as bifurcações clássicas (Sela-Nó, Hopf,...,[8]) e também as bifurcações induzidas pela descontinuidade (DIBs, *Discontinuity Induced Bifurcations*), pois são sistemas de natureza descontínua [2]. Exemplos de DIBs são as bifurcações de contato (*Grazing bifurcations*); as bifurcações de colisão com a fronteira de comutação (*border-collision bifurcations*); a Bifurcação de Equilíbrio de Fronteira (BEBs, *Boundary Equilibrium Bifurcations*) onde, sob variação de parâmetros, é observado uma colisão de um ponto de equilíbrio com a superfície de comutação [3]; e a Bifurcação da T-Singularidade, que dá origem a um ciclo limite de cruzamento [6].

Neste trabalho, aplica-se o controle por modos deslizantes (SMC) com filtro Washout ao conversor boost bidirecional conectado numa bateria para regular a tensão em uma Microrrede cc em modo ilhado. Com base na teoria de sistemas dinâmicos DPWS e da teoria de bifurcações, objetiva-se estudar o comportamento dinâmico do sistema que representa o processo de controle para garantir a robustez quando de variações nos parâmetros do sistema. Do ponto de vista de controle, o estudo de bifurcações se faz necessário pois, mesmo garantindo estabilidade do ponto de equilíbrio, uma perturbação pode levar à instabilidade ou estabilidade num ponto de equilíbrio (ou órbita periódica) não desejado. Na Seção 2 são apresentadas algumas das propriedades dos sistemas dinâmicos DPWS e defini-se os tipos de equilíbrios. Na Seção 3, a partir do sistema normalizado do conversor boost bidirecional conectado numa microrrede cc em modo ilhado, defini-se a estratégia de controle e faz-se uma análise de bifurcações no sistema.

2 Sistemas Dinâmicos DPWS

Suponha que são dados dois campos vetoriais suaves $\mathbf{F}^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a função escalar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a variedade de comutação $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, h(\mathbf{x}) = 0\}$ é uma superfície suave, com gradiente de h diferente de zero. Em seguida, define-se as duas regiões abertas $R^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) < 0\}$ e $R^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) > 0\}$, e o sistema dinâmico DPWS

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{F}^-(\mathbf{x}, \mu), & \text{se } \mathbf{x} \in R^- \\ \mathbf{F}^+(\mathbf{x}, \mu), & \text{se } \mathbf{x} \in R^+. \end{cases} \quad (1)$$

dependente do parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$.

A superfície de comutação Σ pode ser particionada em três regiões diferentes, sendo estas regiões determinadas usando a derivada direcional de h com respeito ao campo vetorial em termos das derivadas de Lie: $L_{\mathbf{F}^\pm} h = h_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}^\pm$, onde $h_{\mathbf{x}}$ é o gradiente de h . Dessa forma, (i) o conjunto de deslizamento atrativo, dado por $\Sigma_{as} = \{\mathbf{x} \in \Sigma : L_{\mathbf{F}^+} h(\mathbf{x}, \mu) < 0 < L_{\mathbf{F}^-} h(\mathbf{x}, \mu)\}$, determina a região onde os campos vetoriais \mathbf{F}^\pm apontam para Σ em ambos os lados; (ii) o conjunto de deslizamento repulsivo, dado por $\Sigma_{rs} = \{\mathbf{x} \in \Sigma : L_{\mathbf{F}^-} h(\mathbf{x}, \mu) < 0 < L_{\mathbf{F}^+} h(\mathbf{x}, \mu)\}$, determina a região onde \mathbf{F}^\pm apontam para fora de Σ em ambos os lados; (iii) o conjunto de cruzamento, dado por $\Sigma_c = \{\mathbf{x} \in \Sigma : L_{\mathbf{F}^-} h(\mathbf{x}, \mu) \cdot L_{\mathbf{F}^+} h(\mathbf{x}, \mu) > 0\}$, determina a região onde um dos campos vetoriais aponta para Σ e o outro aponta para fora.

No conjunto deslizante, dado pela união $\Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$, a dinâmica é descrita pelo campo vetorial deslizante calculado a partir de uma combinação linear convexa ([4]) dos campos vetoriais originais, da forma

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mu) = (1 - \lambda)\mathbf{F}^-(\mathbf{x}, \mu) + \lambda\mathbf{F}^+(\mathbf{x}, \mu). \quad (2)$$

Para cada $\mathbf{x} \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$, o valor de λ é selecionado tal que $L_{\mathbf{F}_s}h(\mathbf{x}, \mu) = 0$, ou seja,

$$\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \mu) = \frac{L_{\mathbf{F}^-}h(\mathbf{x}, \mu)}{L_{\mathbf{F}^-}h(\mathbf{x}, \mu) - L_{\mathbf{F}^+}h(\mathbf{x}, \mu)}, \quad (3)$$

desde que o denominador acima seja diferente de zero. Então, $\lambda \in (0, 1)$ quando $\mathbf{x} \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$, $\lambda = 0$ implica em $L_{\mathbf{F}^-}h(\mathbf{x}, \mu) = 0$, isto é, \mathbf{x} é um ponto de tangência do campo vetorial \mathbf{F}^- com a fronteira Σ , e $\lambda = 1$ implica em $L_{\mathbf{F}^+}h(\mathbf{x}, \mu) = 0$, isto é, \mathbf{x} é um ponto de tangência do campo vetorial \mathbf{F}^+ com a fronteira Σ . Os pontos de tangência formam os limites das regiões de deslizamento e cruzamento, e os pontos de dupla tangência são pontos de transição entre as regiões de deslizamento atrativo e repulsivo, ou entre regiões de cruzamento.

O sistema dinâmico DPWS (1) possui os equilíbrios de cada campo vetorial \mathbf{F}^\pm e também os equilíbrios do campo vetorial deslizante \mathbf{F}_s , conforme as seguintes definições.

Definição 2.1 *Seja $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, dependente ou não do parâmetro μ , um ponto de equilíbrio do campo vetorial \mathbf{F}^- (\mathbf{F}^+), isto é, $\mathbf{F}^-(\bar{\mathbf{x}}, \mu) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{F}^+(\bar{\mathbf{x}}, \mu) = \mathbf{0}$). Este ponto é um **equilíbrio real** de \mathbf{F}^- se $h(\bar{\mathbf{x}}) < 0$ ($h(\bar{\mathbf{x}}) > 0$); ou um **equilíbrio virtual** se $h(\bar{\mathbf{x}}) > 0$ ($h(\bar{\mathbf{x}}) < 0$); ou um **equilíbrio de fronteira** se $h(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.*

O equilíbrio de fronteira é um ponto crítico de mudança entre equilíbrio real e virtual. Esta mudança topológica de equilíbrio real para virtual (ou vice-versa) é influenciada pela variação do parâmetro μ , e caracteriza uma **Bifurcação do Equilíbrio de Fronteira** (BEB) [3].

Definição 2.2 *Um ponto $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, dependente ou não do parâmetro μ , é um **pseudo-equilíbrio** do sistema dinâmico DPWS (1) se $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma$ e é um equilíbrio do campo vetorial deslizante \mathbf{F}_s dado em (2), ou seja, $\mathbf{F}_s(\tilde{\mathbf{x}}, \mu) = \mathbf{0}$ e $h(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$. Além disso, $\tilde{\mathbf{x}}$ é um pseudo-equilíbrio **real** quando $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma_{as} \cup \Sigma_{rs}$, e **virtual** quando $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma_c$.*

3 Bifurcações no Controle do Conversor Boost Bidirecional

Para o estudo de bifurcações, considera-se as equações dinâmicas do modelo simplificado mostrado, na figura 1, numa forma normalizada como em [5]. Esta forma é obtida usando a mudança na escala do tempo: $t = \tau\sqrt{LC}$; nas variáveis de estado: $i_L = \sqrt{\frac{C}{L}}V_{in}x$, $v_c = V_{in}y$; e definindo os novos coeficientes: $a = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $b = r_L\sqrt{\frac{C}{L}}$, $d = \frac{P}{V_{in}^2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Dessa forma, obtém-se

$$\dot{x} = 1 - bx - uy \quad (4)$$

$$\dot{y} = ux - ay - \frac{d}{y}, \quad (5)$$

em que $u \in \{0, 1\}$ é a ação de controle, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $d \in \mathbb{R}$ são parâmetros, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$ as variáveis de estados do sistema. Note que, se $d = 0$, então y pode assumir valor zero.

Os parâmetros a e d representam as cargas resistiva e de potência normalizadas do conversor. Estes parâmetros variam com a demanda de potência e com a disponibilidade de fontes da MR, gerando conseqüentemente mudanças na dinâmica do sistema e incerteza sobre a localização do ponto de pseudo-equilíbrio (ponto de operação desejado) no espaço de estados. Para eliminar a dependência do ponto de pseudo-equilíbrio em relação aos parâmetros a e d , adota-se uma estratégia de controle SMC com filtro passa-altos denominado filtro Washout, [1].

O SMC com filtro washout é proposto com a finalidade de alcançar os seguintes objetivos de controle [5]: (i) regular o valor desejado da tensão de saída $y = y_r$, em que $y_r > 1$; (ii) assegurar a robustez do sistema a variações dos parâmetros a e d ; (iii) minimizar a resposta transitória durante os eventos de variação de carga (variações dos parâmetros a e d).

O filtro washout introduz uma nova variável ao sistema, com equação dinâmica $\dot{z} = \omega(x - z)$, e $\omega > 0$. No equilíbrio, x e z são iguais, assim $(x - z)$ trabalha como uma medida do erro que alimenta o controlador SMC apenas durante o transitório. Em seguida, define-se a ação de controle $u = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}[h(\mathbf{x})])$ com $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, onde $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar da forma $h(\mathbf{x}) = y - y_r + k(x - z)$, com $k > 0$ (parâmetro real de controle) e $y_r > 1$ (tensão normalizada de referência). Assim, a superfície de comutação é definida pelo conjunto $\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : h(\mathbf{x}) = 0\}$.

O sistema de controle em questão pode ser representado como um sistema dinâmico DPWS

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{F}^-(\mathbf{x}), & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0 \\ \mathbf{F}^+(\mathbf{x}), & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (6)$$

com os campos vetoriais

$$\mathbf{F}^-(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx \\ -ay - \frac{d}{y} \\ \omega(x - z) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^+(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 - bx - y \\ x - ay - \frac{d}{y} \\ \omega(x - z) \end{bmatrix}.$$

Como $y \geq 0$ (podendo ter $y = 0$ apenas se $d = 0$), o campo $\mathbf{F}^-(\mathbf{x})$ possui apenas um ponto de equilíbrio: $\mathbf{e}^- = \left(\frac{1}{b}, \sqrt{\frac{-d}{a}}, \frac{1}{b}\right)$, definido para $d \leq 0$. Este equilíbrio é classificado como um nó estável, já que os autovalores do sistema são reais negativos ($\{-2a, -b, -\omega\}$ se $d \neq 0$ ou $\{-a, -b, -\omega\}$ se $d = 0$). Além disso, este é um ponto de equilíbrio real ($h(\mathbf{e}^-) < 0$) para $-ay_r^2 < d < 0$, um equilíbrio virtual ($h(\mathbf{e}^-) > 0$) para $d < -ay_r^2$, e é um equilíbrio de fronteira ($h(\mathbf{e}^-) = 0$) para $d = -ay_r^2$.

O campo vetorial $\mathbf{F}^+(\mathbf{x})$ possui dois pontos de equilíbrio: o ponto $\mathbf{e}_1^+ = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_1)$, definido para $0 < d \leq d_{SN}$, e o ponto $\mathbf{e}_2^+ = (\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{x}_2)$ definido para $d \leq d_{SN}$; em que $\bar{x}_{2,1} = \frac{2(a+d)}{1+2ab \pm \sqrt{1-d/d_{SN}}}$ e $\bar{y}_{2,1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-d/d_{SN}}}{2(1+ab)}$, com $d_{SN} = \frac{1}{4b(1+ab)}$.

Para o estudo da estabilidade dos equilíbrios do campo \mathbf{F}^+ pode-se considerar apenas a dinâmica no plano xy , já que a dinâmica em z é estável (autovalor $\lambda_3 = -\omega < 0$) com ponto estacionário igual em x . Dessa forma, calcula-se as matrizes $A_{1,2}^+ = \mathbf{f}_x^+(\mathbf{e}_{1,2}^+)$, onde \mathbf{f}^+ é o vetor dado pelas duas primeiras componentes de \mathbf{F}^+ . Em seguida obtém-se as equações que determinam o valor do determinante e traço: $\text{Det}(A_{1,2}^+) = 1 + ab - \frac{bd}{\bar{y}_{1,2}^2}$ e $\text{Tr}(A_{1,2}^+) = -a - b + \frac{d}{\bar{y}_{1,2}}$.

No intervalo $0 < d < d_{SN}$ o equilíbrio \mathbf{e}_1^+ é um ponto de sela ($\text{Det}(A_1^+) < 0$), e é sempre virtual ($h(\mathbf{e}_1^+) < 0$). Já o equilíbrio \mathbf{e}_2^+ é instável (nó ou foco) no intervalo $d_{Hopf} < d < d_{SN}$ ($\text{Det}(A_2^+) > 0$ e $\text{Tr}(A_2^+) > 0$) e estável (nó ou foco) no intervalo $d < d_{Hopf}$ ($\text{Det}(A_2^+) > 0$ e $\text{Tr}(A_2^+) < 0$), em que $d_{Hopf} = \frac{a+b}{(1+2ab+b^2)^2}$. Além disso, o equilíbrio \mathbf{e}_2^+ é virtual ($h(\mathbf{e}_2^+) < 0$) para $d_{BEB+} < d < d_{SN}$, real para ($h(\mathbf{e}_2^+) > 0$) para $d < d_{BEB+}$, e é um equilíbrio de fronteira ($h(\mathbf{e}_2^+) = 0$) para $d = d_{BEB+}$, com $d_{BEB+} = \frac{y_r(1 - y_r)}{b} - ay_r^2$.

3.1 Campo Vetorial Deslizante e Seus Equilíbrios

O campo vetorial deslizante é calculado a partir das equações (2) e (3), resultando em

$$\mathbf{F}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{ky - x} \begin{bmatrix} bx^2 - x + ay^2 + d + k\omega y(x - z) \\ -k(bx^2 - x + ay^2 + d) - k\omega x(x - z) \\ \omega(ky - x)(x - z) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Os equilíbrios de \mathbf{F}_s (isto é, os pseudo-equilíbrios do sistema (6)) são calculados conforme definição 2.2, obtendo $\mathbf{p}^\pm = (\tilde{x}^\pm, y_r, \tilde{x}^\pm)$, com $\tilde{x}^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4b(d + ay_r^2)}}{2b}$. Note que \mathbf{p}^\pm só existem para $\tilde{x}^\pm \neq ky_r$ e $d \leq d_{SN}^s$, em que $d_{SN}^s = \frac{1 - 4aby_r^2}{4b}$.

Para o estudo da estabilidade dos equilíbrios de \mathbf{F}_s é importante conhecer a posição destes pontos sobre a fronteira de comutação Σ , determinando condições sobre os parâmetros para que \mathbf{p}^\pm estejam na região atrativa Σ_{as} . A região Σ_{as} pode ser determinada pela solução do sistema de inequações: $L_{\mathbf{F}^-}h(\mathbf{x}) > 0$ e $L_{\mathbf{F}^+}h(\mathbf{x}) < 0$. Então, as condições sobre os parâmetros para ter \mathbf{p}^\pm em Σ_{as} são

$$k > \frac{\tilde{x}^+}{y_r} \quad \text{e} \quad -ay_r^2 < d \leq d_{SN}^s \tag{8}$$

$$k > \frac{\tilde{x}^-}{y_r} \quad \text{e} \quad d_{BEB^+} < d \leq d_{SN}^s, \tag{9}$$

para todo $a > 0$, $b > 0$ e $y_r > 1$.

Sabendo que todo ponto na região de deslizamento atrativo satisfaz a inequação $ky - x > 0$, calcula-se o campo vetorial desingularizado fazendo $\mathbf{F}_{ds}(\mathbf{x}) = (ky - x)\mathbf{F}_s(\mathbf{x})$. Além disso, a dinâmica no modo deslizante pode ser analisada no plano xy , fazendo $z = z_\Sigma$ e tomando as duas primeiras componentes do vetor deslizante desingularizado \mathbf{F}_{ds} .

Após a desingularização, as equações diferenciais que descrevem a dinâmica no modo deslizante, projetadas no plano xy , ficam

$$\dot{x} = bx^2 - x + ay^2 + d - \omega y(y - y_r) \tag{10}$$

$$\dot{y} = -k(bx^2 - x + ay^2 + d) + \omega x(y - y_r), \tag{11}$$

para $ky - x > 0$, $y > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Dada a matriz jacobiana J^\pm do sistema (10)-(11) linearizada em torno dos pontos \mathbf{p}^\pm projetados no plano xy , calcula-se o determinante e o traço: $\text{Det}(J^\pm) = \omega(1 - 2b\tilde{x}^\pm)(ky_r - \tilde{x}^\pm)$ e $\text{Tr}(J^\pm) = (\omega + 2b)\tilde{x}^\pm - 2aky_r - 1$. Impondo as condições (8)-(9), então $\text{Det}(J^-) > 0$ (pois $\tilde{x}^- \leq 1/2b$), e portanto, \mathbf{p}^- é estável em Σ_{as} se $k > k_{Hopf}$ ($\text{Tr}(J^-) < 0$), em que $k_{Hopf} = \frac{(\omega + 2b)\tilde{x}^- - 1}{2ay_r}$. E em relação a \mathbf{p}^+ , $\text{Det}(J^+) < 0$ pois $\tilde{x}^+ \geq 1/2b$. Portanto, é um pseudo-sela (instável) na região Σ_{as} . Dessa forma, o pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- deve ser o ponto de operação desejado para o processo de controle.

3.2 Análise de Bifurcações

Nesta Subseção é feito um estudo de bifurcações no campo vetorial deslizante envolvendo os pseudo-equilíbrios \mathbf{p}^\pm do sistema dinâmico DPWS (6). Esta análise de bifurcações pode ser representada num conjunto de bifurcações em função dos parâmetros de cargas a e d e do parâmetro de controle k , como mostrado na figura 2.

Para começar, identifica-se a bifurcação **Bogdanov-Takens** (curvas de cor roxa, BT, na figura 2). Esta bifurcação, caracterizada por $\text{Det}(J^\pm) = \text{Tr}(J^\pm) = 0$, ocorre para valores dos parâmetros (d, k, a) que satisfazem as equações

$$\begin{cases} a = \frac{ky_r(2b + \omega) - 1}{2ky_r} \\ d = \frac{y_r}{2k} (1 - (2b + \omega)y_r k + 2k^2 - 2by_r k^3) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \frac{\omega}{4by_r k} \\ d = \frac{k - \omega y_r}{4bk} \end{cases}. \tag{12}$$

A partir da condição $\text{Det}(J^+) = \text{Det}(J^-) = 0$, isto é, $d = d_{SN}^s$, identifica-se a **Bifurcação Sela-Nó** (plano de cor preta, SN na figura 2). Esta bifurcação é caracterizada pelo nascimento (ou desaparecimento) de um par de equilíbrios, um sela e um nó. Para $d < d_{SN}^s$ o campo

vetorial deslizante possui dois equilíbrios (\mathbf{p}^- e \mathbf{p}^+), em $d = d_{SN}^s$ estes equilíbrios colidem ($\mathbf{p}^-(d_{SN}^s) = \mathbf{p}^+(d_{SN}^s)$) e para $d > d_{SN}^s$ eles desaparecem. A bifurcação Sela-Nó pode ser classificada de duas formas: SN^{rs} e SN^{as} . A bifurcação SN^{rs} ocorre para $d = d_{SN}^s$ e $k < \frac{1}{2by_r}$, sendo que para $d < d_{SN}^s$ e próximo ao valor crítico d_{SN}^s , \mathbf{p}^- é um pseudo-sela e \mathbf{p}^+ é um pseudo-nó, ambos em Σ_{rs} . A bifurcação SN^{as} ocorre para $d = d_{SN}^s$ e $k > \frac{1}{2by_r}$, sendo que para $d < d_{SN}^s$ e próximo ao valor crítico d_{SN}^s , \mathbf{p}^- é um pseudo-nó e \mathbf{p}^+ é um pseudo-sela, ambos em Σ_{as} .

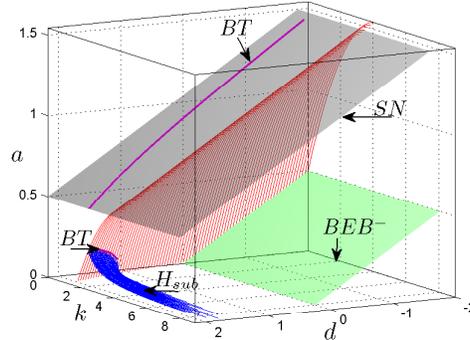
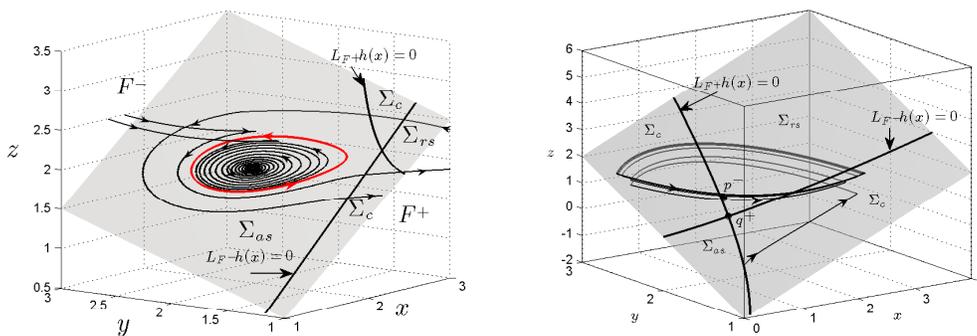


Figura 2: Conjunto de Bifurcações (d, k, a) . Parâmetros fixos: $b = 0.06$, $\omega = 0.6$ e $y_r = 2$.

A bifurcação de Hopf é caracterizada pela mudança de estabilidade de um equilíbrio tipo foco, a partir da variação do parâmetro de bifurcação, criando ao redor do equilíbrio um ciclo limite. O sistema dinâmico (10)-(11) linearizado ao redor do ponto de pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- projetado no plano xy , apresenta autovalores puramente imaginários quando $k = k_{Hopf}$ desde que o determinante de J^- seja positivo, ou seja, $k_{Hopf} > \frac{\tilde{x}^-}{y_r}$. Então, ocorre uma **Bifurcação de Hopf** em $k = k_{Hopf}$, para todo conjunto de parâmetros (a, d, y_r, ω, b) que satisfaz a inequação $(\omega + 2b - 2a)\tilde{x}^- - 1 > 0$. Esta bifurcação é classificada como *subcrítica*, pois o ciclo limite é instável ao redor do pseudo-foco estável. Na figura 3a é apresentado um resultado de simulação do sistema (6) onde é visualizado um ciclo limite instável (uLC) ao redor do pseudo-foco estável, originado pela bifurcação de Hopf subcrítica (superfície de cor azul, H_{sub} na figura 2).



(a) Ciclo limite instável, $a = 0.06$, $d = 1.5$ e $k = 2$. (b) CLC estável, $a = 0.5$, $d = -1$ e $k = 0.5$.

Figura 3: Simulação do sistema (6). Parâmetros: $b = 0.06$, $\omega = 0.6$ e $y_r = 2$.

A **Bifurcação de Equilíbrio de Fronteira** (plano de cor verde, BEB^- na figura 2) envolvendo o pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^+ e o equilíbrio \mathbf{e}^- do campo vetorial \mathbf{F}^- ocorre para $d = -ay_r^2$ e é classificada como *dobra não suave*, pois, para $d < -ay_r^2$ ambos são virtuais, em $d = -ay_r^2$ eles colidem formando o equilíbrio de fronteira, e para $d > -ay_r^2$ ambos são reais. A **Bifurcação**

de Equilíbrio de Fronteira (BEB^+) envolvendo o pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- e o equilíbrio \mathbf{e}_2^+ do campo vetorial \mathbf{F}^+ ocorre para $d = d_{BEB^+}$ e é classificada como *Persistência*, pois, para $d < d_{BEB^+}$ tem-se \mathbf{p}^- virtual e \mathbf{e}_2^+ real, em $d = d_{BEB^+}$ eles colidem formando o equilíbrio de fronteira, e para $d > d_{BEB^+}$ tem-se \mathbf{p}^- real e \mathbf{e}_2^+ virtual. O plano de bifurcação $d = d_{BEB^+}$ não aparece no conjunto de bifurcações da figura 2 pois neste caso tem-se $d_{BEB^+} \ll 0$.

Outra bifurcação que pode ocorrer é a **Bifurcação da T-Singularidade**. Esta bifurcação é caracterizada pela movimentação de um pseudo-equilíbrio da região Σ_{as} para a região Σ_{rs} (ou vice-versa), passando pelo ponto de dupla tangência invisível (se $\bar{\mathbf{x}}$ é um ponto de dupla tangência invisível, então, $L_{\mathbf{F}^-}h(\bar{\mathbf{x}}) = L_{\mathbf{F}^+}h(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $L_{\mathbf{F}^-}^2h(\bar{\mathbf{x}}) > 0$ e $L_{\mathbf{F}^+}^2h(\bar{\mathbf{x}}) < 0$, e este ponto é denominado T-Singularidade, “Teixeira Singularity” [6]). A bifurcação da T-Singularidade dá origem a uma órbita periódica que cruza a fronteira Σ passando de um campo vetorial para outro, denominada **Ciclo limite de Cruzamento** (CLC). O CLC pode ser estável ou instável, [1]. Neste caso, quando $k = \frac{\bar{x}^-}{y_r}$ (superfície de cor vermelha na figura 2) o pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- colide com um ponto de dupla tangência invisível se $a > \frac{1}{2y_r}(-by_r k^2 + k + (b + \omega)y_r)$, sendo que, para $k > \frac{\bar{x}^-}{y_r}$ o ponto $\mathbf{p}^- \in \Sigma_{as}$ e para $k < \frac{\bar{x}^-}{y_r}$ o ponto $\mathbf{p}^- \in \Sigma_{rs}$, desde que d satisfaça a condição (9). Na figura 3b é apresentado um resultado de simulação do sistema (6) onde é visualizado um CLC estável ao redor da região Σ_{rs} , originado pela bifurcação da T-Singularidade.

4 Conclusão

Com o objetivo de caracterizar o comportamento dinâmico do sistema de controle de um conversor boost bidirecional operando em uma microrrede cc em modo ilhado com carga CPL's, fez-se uso da análise de bifurcações, apresentando os resultados num conjunto de bifurcações em função dos parâmetros normalizados de cargas a e d e de controle k . Com base na análise de bifurcações, pode-se garantir estabilidade do pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- (ponto de operação de interesse) e robustez a variações de carga no sistema de controle em estudo. Isto, para valores de a e d tais que $a_{min} < a < a_{max}$ e $d_{BEB^+} < d < d_{SN}^s$, se o parâmetro de controle k satisfaz as condições $k > \frac{\bar{x}^-}{y_r}$ e $k > k_{Hopf}$. É importante escolher sempre um valor de k não próximo de k_{Hopf} , evitando assim a formação de ciclo limite instável ao redor do pseudo-equilíbrio \mathbf{p}^- .

Referências

- [1] R. Cristiano. *Bifurcações em Sistemas Dinâmicos DPWS com Aplicações em Eletrônica de Potência*. Dissertação de mestrado. PGEAS, UFSC, 2013.
- [2] M. di Bernardo, A. Nordmark, G. Olivar, (2008b). *Discontinuity-induced bifurcations of equilibria in piecewise-smooth dynamical systems*; Physica D 237, 119-136.
- [3] M. di Bernardo, D. J. Pagano, E. Ponce. *Nonhyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov systems: A case study approach*. Int. J. Bif. Chaos, vol. 18, 2008.
- [4] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1988.
- [5] A. P. N. Tahim, D. J. Pagano, E. Ponce. *Nonlinear Control of Boost Bidirectional Converters in Stand-alone dc Microgrids*. 51st IEEE CDC. Hawaii, USA; 2012.
- [6] M. A. Teixeira. *Stability Conditions for Discontinuous Vector Fields*. J. Differential Equations. Volume 88, Issue 1, November 1990, Pages 15-29.
- [7] D. Boroyevich, I. Cvetkovic, D. Dong, R. Burgos, F. Wang, and F. Lee. *Future electronic power distribution systems a contemplative view*. 12th OPTIM, 2010, pp. 1369-1380.
- [8] James D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. Mathematical Modeling and Computation. 2007, Society for Industrial and Applied Mathematics.