Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Método das Diferenças Finitas aplicado em Equações Diferenciais de Segunda Ordem na Análise de Tensão em Circuitos RLC

Yan G. A. Felipe[1], Thamyrys M. Azevedo[2], Matheus da S. Menezes[3], Ivan Mezzomo[4], Stefeson B. Melo[5]
CCEN/UFERSA, Mossoró, RN

O estudo das Equações Diferenciais (ED) é crucial para modelar fenômenos físicos modernos, como é o caso do circuito RLC [1]. Entre as EDs, destacamos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que lidam com apernas uma variável independente, que ao serem solucionadas obtemos uma família de curvas, se reduzindo a uma solução específica através do conceito de Problema de Valor Inicial (PVI) [2]. Este trabalho avalia o Método das Diferenças Finitas (MDF) na resolução de EDOs de origem física para indicar a tensão em circuitos RLC, utilizando-se das mesmas condições iniciais, adentrando-se principalmente no ambito físico com as relações estabelecidas pela análise do circuito RLC e de seus componentes [3]. Visualizamos o MDF como uma alternativa não analítica para resolver essas EDOs e manter um modelo apoximado.

O MDF trata-se da discretização dos dominios em que as EDO's estão estabelecidas em uma quantidade N de pontos sequenciados e espaços por uma distância h. Nesse contexto, utilizamos aproximações das derivadas definidas em pontos na função de ordem zero, apartir da expansão da série de Taylor, aplicado-se ao redor do ponto desejado no domínio discretizado, tomando a forma:

$$f[n \pm 1] = f[n] \pm hf'[n] + \frac{h^2}{2}f^2[n] \pm \frac{h^3}{6}f^3[n] + \frac{h^4}{24}f^4[n] \pm ... \tag{1}$$

Conforme estabelecido circuito RLC em paralelo foi utilizado, considerando a resposta natural. Esses sistemas, a partir de uma análise genérica pelas leis de Kirchhoff, geram uma EDO de segunda ordem controlada pelas energias armazenadas no capacitor ($v_0 = v(0)$) e no indutor ($i_0 = i_l(0)$) [3]. Essas serão as condições de contorno para a solução específica da EDO. Para o MDF partiremos da transformação da EDO do circuito em sua versão discretizada, usando da expansão em série de Taylor, encontando:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{v[n+1] - 2v[n] + v[n-1]}{h^2} + \frac{1}{RC}\frac{v[n+1] - v[n]}{h} + \frac{v[n]}{LC} = 0 \tag{2}$$

Neste ponto pode ser realizada a manipulação da equação (2) para encontrar uma solução na forma iterativa, onde pontos da solução serão calculados a partir de dois pontos anteriores, conforme equação a seguir:

$$v[n+1] = ((\frac{2}{h^2} + \frac{1}{RCh} - \frac{1}{LC})v[n] - (\frac{1}{h^2})v[n-1]) \div (\frac{1}{h^2} + \frac{1}{RCh}) \tag{3}$$

[1]yan.felipe@alunos.ufersa.edu.br
[2]thamyrys.azevedo@alunos.ufersa.edu.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

Nesse ponto a aplicação do método não poderá ser realizada visto que de forma iterativa não pode-se calcular o ponto $v[1]$, visto que este dependeria de $v[-1]$ (ponto teórico). Portanto, será utilizada a aproximação discreta da derivada primeira, o modelo físico da tensão no capacitor e as leis de Kirchroff para calcular $v[-1]$ e somente então aplicaremos o método iterativo, toma-se então:

$$\frac{dv}{dt}(0) = \frac{-(\frac{v_0}{R} + i_0)}{C} = \frac{v_0 - v[n-1]}{h} \tag{4}$$

ou então:

$$v[n-1] = -\frac{h}{C}(\frac{v_0}{R} + i_0) + v_0 \tag{5}$$

Para este trabalho foi feita a comparação do MDF com a resolução da EDO de forma analítica, ambos foram aplicados no intervalo de tempo $[0 : 0,001s]$, no MDF foram usados três níveis de discretização: $N_1 = 50, N_2 = 500, N_3 = 50000$. Para conseguir contemplar as 3 possiveis resposta da EDO estabelecemos três casos onde foram utilizados os valores $v_0 = 12V, i_0 = 30mA, L = 50mH, C = 0,2, R_a = 100\Omega, R_b = 250\Omega, R_c = 1k\Omega$ nas equações (3) e (5), enquanto de forma simultanea serão aplicados os mesmos pontos de tempo nas soluções analíticas dos casos, visiveis na Tabela 1. Os resultados da comparação dos metodos estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 1: Equações encontradas pelo método analítico.

caso a	caso b	caso c
$15.82e^{-47913t} - 3.82e^{-2087t}$	$e^{-10000t}(12 - 27000t)$	$e^{-2500t}(12\cos(9682t) - 18.59\sin(9682t))$

Tabela 2: Erros calculados com relação ao número de pontos N e tamanho de passo h.

N e h	Valor de N e h	Tipo de erro	caso a	caso b	caso c
N_1	50	Erro médio percentual	$152,50\%$	$46,38\%$	$31,44\%$
h_1	$1,9608 \times 10^{-1}$ seg	Erro máximo absoluto	$4,408$	$2,3049$	$7,87 \times 10^{-1}$
N_2	500	Erro médio percentual	$21,98\%$	$4,23\%$	$3,61\%$
h_2	$1,9960 \times 10^{-6}$ seg	Erro máximo absoluto	$6,29 \times 10^{-1}$	$2,63 \times 10^{-1}$	$8,32 \times 10^{-2}$
N_3	50000	Erro médio percentual	$0,25\%$	$0,05\%$	$0,08\%$
h_3	2.0000×10^{-8} seg	Erro máximo absoluto	$6,60 \times 10^{-2}$	$2,68 \times 10^{-3}$	$8,40 \times 10^{-4}$

Os dados da Tabela 2 mostram que o uso do MDF é eficaz para resolver esses tipos de problemas. As aproximações produzidas representaram com precisão as funções originais, tendo casos com um erro percentual médio abaixo de 5% para epenas $N = 500$. O erro diminui à medida que aumenta a discretização do conjunto. No caso c, o método teve um desempenho superior, com erros menores, enquanto o caso a foi menos eficiente. Isso pode ser atribuído à variação do formato da curva de solução, dependendo dos parâmetros do problema.

Referências

[1] J. Stewart. **Cálculo**. 7a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[2] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. 10a. ed. São Paulo: CENGAGE, 2015.

[3] J. W. Nilsson. **Circuitos elétricos**. Trad. por Sonia Midori Yamamoto. 10a. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015. Cap. 8.