Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Sobre a unicidade da solução no controle de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos não observados

Larissa T. Oliveira* **Eduardo F. Costa**
Depto. de Matemática Aplicada e Estatística, ICMC, USP,
Av. Trabalhador são-carlense, 400, Centro, CEP: 13566-590, São Carlos, SP
E-mail: ltdo@icmc.usp.br, efcosta@icmc.usp.br.

RESUMO

Os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLSM) são considerados uma importante classe de sistemas e vêm sendo intensamente estudados, principalmente pela característica de serem similares a sistemas lineares determinísticos clássicos e por modelar sistemas que possuem alterações abruptas em sua dinâmica em determinados instantes. Os SLSMs têm aplicações em várias áreas como economia [1, 2] e engenharia (por exemplo em robótica [4, 9] e na fabricação de papel [3]).

Um dos métodos disponíveis na literatura para resolver o problema de custo quadrático de N estágios para sistemas lineares com saltos é comumente chamado de método variacional [5]. Este método baseia-se em uma condição do tipo "gradiente nulo", que é necessária porém não suficiente para otimalidade da solução, conforme apresentado em [7]. Surgiram, em seguida, alguns trabalhos que conjecturaram sobre a suficiência desta condição, como por exemplo [8], sem chegar contudo a uma conclusão definitiva; mais recentemente foi observado que a questão continua em aberto [6].

Uma formulação sucinta do problema é como segue. Seja uma cadeia de Markov cujo estado no "instante" $k \geq 0$ é denotado por $\theta(k)$ e que toma valores em $\mathcal{T} = \{1, 2, \cdots, T\}$. Assuma $P = [p_{ij}]$ conhecida, tal que $p_{ij} = Pr\{\theta(k+1) = j|\theta(k) = i\}$; além disso, seja $P(\theta(k) = i) = \pi_i(k)$. Associado a esta cadeia, considere a seguinte recursão: $X_i(k) = \sum_{j=1}^{T} p_{ji}(A_j+B_jg(k))X_j(k-1)(A_j+B_jg(k))' + \sum_{j=1}^{T} p_{ji}\pi_j(k-1)G_jG_j'$, com condição inicial dada por $X_i(0) = \pi_i(0)x(0)x'(0)$, na qual as matrizes A_j, B_j e G_j, $j \in \mathcal{T}$, são conhecidas e de dimensões apropriadas, e $g(k)$ é a variável (matricial) a ser determinada. Considerando matrizes de ponderação positivas semidefinidas C_j, D_j, $j \in \mathcal{T}$, definimos o problema de otimização na variável $g = \{g(0), g(1), ..., g(N-1)\}$:

$$\min_{g} \quad \mathcal{J}_N = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{T} tr\{(C_i + g'(k)D_ig(k))X_i(k)\}. \tag{1}$$

Para a interpretação física e detalhes do problema acima, por gentileza consulte [2, 6, 7]. O valor de $\theta(k)$ não é observado, explicando porque o problema acima não depende dessa variável.

A *contribuição deste resumo* é apresentar um exemplo numérico esclarecendo que o problema pode apresentar mínimos locais múltiplos e distintos, levando ao resultado formalizado no final deste resumo. Em particular, conclui-se que a condição de otimalidade citada no início não é suficiente para otimalidade; também, o método variacional pode convergir para diferentes mínimos locais, como ilustrado no exemplo. Este exemplo é um dos dois que encontramos entre 10.000 gerados aleatoriamente.

Exemplo numérico. Considere os parâmetros:
$A_1 = \begin{bmatrix} 0.3182 & -0.4145 \\ 0.5992 & 1.3150 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1.6236 & -0.1252 \\ 1.6573 & -2.5347 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1.5097 & 2.7404 \\ -3.8474 & 2.7029 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} -24.5608 & 35.9306 \\ -12.6778 & 18.0155 \end{bmatrix}$,
$C_1 = \begin{bmatrix} 2.2161 & -2.5044 \\ -2.5044 & 2.8302 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 0.0037 & 0.0808 \\ 0.0808 & 1.7709 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 0.4955 & -0.4143 \\ -0.4143 & 0.3464 \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} 9.2357 & -12.4190 \\ -12.4190 & 16.6996 \end{bmatrix}$,
$B_1 = \begin{bmatrix} -0.7975 \\ -0.1901 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} -0.1653 \\ 0.7806 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0.3732 \\ -0.2935 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} -0.7853 \\ -0.4005 \end{bmatrix}$, $G_1 = \begin{bmatrix} 2.4078 \\ 0.7081 \end{bmatrix}$, $G_2 = \begin{bmatrix} 0.7858 \\ -0.8289 \end{bmatrix}$,
$G_3 = \begin{bmatrix} 0.5203 \\ 0.3073 \end{bmatrix}$, $G_4 = \begin{bmatrix} -0.5039 \\ -0.2670 \end{bmatrix}$, $\pi(0) = \begin{bmatrix} 0.2440 & 0.1691 & 0.5412 & 0.0457 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} -0.5212 \\ 0.0605 \end{bmatrix}$, $D_1 = 0.3613$,

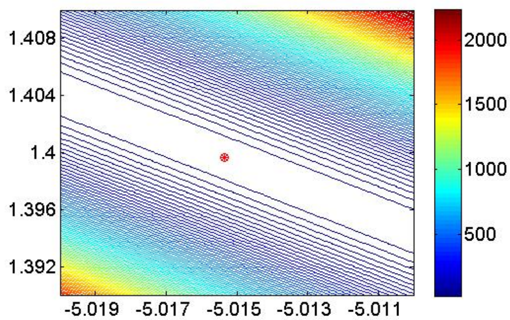
*Agradecimentos a FAPESP procs.: 2010/12360-3, 2012/14085-5 e 2013/19380-8, CAPES procs.: DS-7899600/M e CNPq procs.: 311290/2013-2 e 306466/2010-4 pelos apoios financeiros concedidos.

$D_2 = 0.4700$, $D_3 = 0.0588$, $D_4 = 0.3300$, $T = 4$, $N = 27$ e $P = [p_{ij}]$, onde $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1$, $p_{42} = p_{43} = 0.2840$, $p_{44} = 0.4321$ e os demais nulos.

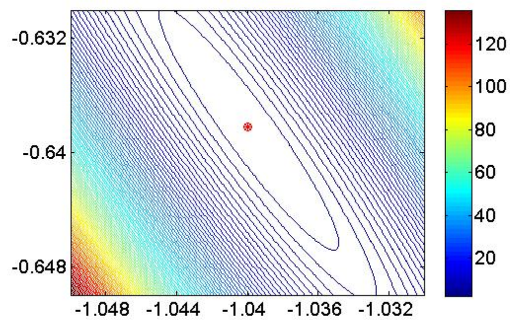
Para obter os resultados apresentados a seguir implementamos o método variacional de [5] utilizando o software *MATLAB*® na versão 7.8. O método foi inicializado com duas sequências de ganhos iniciais distintas $g_1^0(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $g_2^0(k) = \begin{bmatrix} -2.1563 & 1.8474 \end{bmatrix}$, para $k = \{0, .., N-1\}$, e tolerância $\epsilon = 10^{-16}$.

A partir da sequência de ganhos g_1^0 obtivemos o valor ótimo de $\mathcal{J}_{N_1}^* \approx 2.72989 \times 10^{22}$ com ganho ótimo $g_1^*(N) = \begin{bmatrix} -5.0153 & 1.3996 \end{bmatrix}$. Já com a sequência de ganhos g_2^0 obtivemos um valor ótimo inferior $\mathcal{J}_{N_2}^* \approx 1.36997 \times 10^{21}$ com ganho ótimo $g_2^*(N) = \begin{bmatrix} -1.0400 & -0.6382 \end{bmatrix}$.

Nas figuras a seguir podemos ver as curvas de nível da função $\mathcal{J}_N$ nos pontos próximos aos ganhos ótimos locais $g_1^*(N)$ e $g_2^*(N)$, respectivamente. No eixo x estão os valores da primeira coordenada do vetor ganho e no eixo y os valores da segunda coordenada. Em ambas figuras destacamos o ponto ótimo.



(a) Curvas de nível próximas ao ganho ótimo $g_1^*(N)$.



(b) Curvas de nível próximas ao ganho ótimo $g_2^*(N)$.

Concluímos este resumo formalizando o seguinte resultado.

Teorema 1. *A solução ótima do problema de otimização* (1) *pode não ser única.*

Palavras-chave: *Sistemas Lineares com Saltos Markovianos, método variacional, unicidade de solução.*

Referências

[1] O. L.V. COSTA and W. L. DE PAULO. Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems. *Automatica*, 43(4):587 – 597, 2007.

[2] J. B. R. DO VAL and T. BASAR. Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 23:1099 – 1131, 1999.

[3] M. KHANBAGHI, R. P. MALHAME, and M. PERRIER. Optimal white water and broke recirculation policies in paper mills via jump linear quadratic control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(4):578 – 588, 2002.

[4] G. N. SARIDIS. Intelligent robotic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28:547 – 557, 1983.

[5] A. N. VARGAS. Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos Markovianos e ruído aditivo. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, SP, 2004.

[6] A. N. VARGAS, E. F. COSTA, and J. B. R. DO VAL. On the control of Markov jump linear systems with no mode observation: application to a DC motor device. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 23(10):1136 – 1150, 2013.

[7] A. N. VARGAS, J. B. R. DO VAL, and E. F. COSTA. Receding horizon control of Markov jump linear systems subject to noise and unobserved state chain. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, CDC*, pages 4381 – 4386, 2004.

[8] A. N. VARGAS, J. B. R. DO VAL, and E. F. COSTA. Optimality condition for the receding horizon control of Markov jump linear systems with non-observed chain and linear feedback controls. In *44th IEEE Conference on Decision and Control and 2005 European Control Conference. CDC - ECC '05*, pages 7308 – 7313, 2005.

[9] A. N. VARGAS, W. FURLONI, and J. B. R. DO VAL. Second moment constraints and the control problem of Markov jump linear systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20(2):357 – 368, 2013.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0133