Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 11, n. 1, 2025.

Trabalho apresentado no XLIII CNMAC, Centro de Convenções do Armação Resort - Porto de Galinhas - PE, 2024

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Códigos Perfeitos na Métrica l_p sob o Reticulado A_2

Gabrielly da Silva Roman[1]
Unicamp, Campinas, SP
João E. Strapasson[2]
Unicamp, Limeira, SP

Uma maneira de descrevermos um **reticulado** é como toda combinação linear inteira de vetores linearmente independentes. Um subconjunto $\Lambda^{'} \subset \Lambda$ é um **sub-reticulado** de Λ se $\Lambda^{'}$ também for um reticulado. Outros conceitos importantes podem ser encontados em [1, 2].

Neste trabalho vamos considerar métricas em $\mathbb{R}^n$ induzidas por uma norma, isto é $d(x, y) = \|x - y\|$. Mais sobre as normas em [5].

Consideremos Λ_a um reticulado, de agora em diante denominado como **reticulado ambiente**. Diremos que qualquer sub-reticulado $\Lambda \subset \Lambda_a$ é um **código** no ambiente Λ_a.

Um **ladrilhamento** do $\mathbb{R}^n$ por um reticulado Λ é uma cobertura disjunta do $\mathbb{R}^n$ por uma região fundamental $\mathcal{F}$ fixada, isto é, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in \Lambda} (\boldsymbol{x} + \mathcal{F})$, em que $\mathcal{F}$ é uma região fundamental qualquer. Regiões fundamentais associadas a um reticulado são regiões que ladrilham o $span(B)$ através de translações por pontos do reticulado.

Outro conceito importante e que utilizaremos bastante é o de bola discreta. Dado um reticulado Λ_a, a **bola discreta** denotada por $\tilde{B}_p(\boldsymbol{x}, r)$ (bola na métrica l_p) é definida como

$$\tilde{B}_p(x, r) = \left\{(y_1, \ldots, y_n) \in \Lambda_a : \ |x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p \leq r^p\right\},\ 1 \leq p < \infty.$$

Quando $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, denotaremos a bola simplesmente por $\tilde{B}_p(r)$. As caracterizações de ladrilhamentos podem ser vistas com mais detalhes em [6].

É significativo definir o conjunto de todas as **distâncias realizáveis** em Λ_a, dado por

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n(\Lambda_a) = \{\|x\| : \ x \in \Lambda_a\}. \tag{1}$$

Definimos o **raio de empacotamento (discreto)**, denotado por $r(\Lambda)$, como sendo o maior r, tal que

(i) $((\tilde{B}_p(r) + \boldsymbol{\lambda}) \cap \tilde{B}_p(r)) \cap \Lambda_a = \emptyset$, onde $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$;

(ii) $r \in \mathcal{D}_n(\Lambda_a)$.

Além disso, se Λ também cumprir a seguinte propriedade

(iii) $\tilde{B}_p(r) + \Lambda = \Lambda_a$

Λ será dito um **código r-perfeito** em Λ_a.

Sendo assim, o problema de encontrar códigos perfeitos em Λ_a está associado à dificuldade de encontrar uma cobertura para Λ_a. Nesse sentido, veremos condições para se obter esses códigos.

[1]g230139@dac.unicamp.br
[2]strapass@unicamp.br

Os teoremas 3.0.6 e 6 de [3, 6], respectivamente, nos dizem que, para o código que estamos analisando ladrilhe o reticulado ambiente, precisamos verificar se bolas centradas em pontos distintos do código com raio r são disjuntas. Ou seja, precisamos verificar se existe um empacotamento.

É importante ter bons limitantes superiores para o raio de um código perfeito para saber quando parar as buscas, pois a partir daquele limitante não encontraremos mais nenhum código perfeito. Vamos trabalhar aqui com limitantes obtidos por [4] para termos uma noção de onde parar as buscas. Esses limitantes são uma generalização feita para trabalhar com reticulados ambientes gerais na métrica euclidiana (l_2).

Os passos do algoritmo de busca são os seguintes: fixar valores para p, n e escolher o reticulado ambiente que iremos utilizar. Como nosso foco é trabalhar com o ambiente A_n e na dimensão 2, basta fixar o valor para p. Feito isso, obtemos todos os pontos de Λ_a que possuem norma menor ou igual a r. O algoritmo utilizado aparece em [6] com mais detalhes.

Em resumo, o algoritmo citado vai listar todos os códigos r_i-perfeitos em A_2. Dados o reticulado ambiente, a dimensão, o valor de p, vamos listar todos os valores possíveis para o raio r_i. Em seguida, deve-se calcular a cardinalidade da bola $\tilde{B}_p^n(r_i)$ para obter o $vol(\Lambda)$ (volume de Λ) e, na sequência, listar todos os reticulados Λ com o volume que foi dado no passo anterior (lembrando que o volume corresponde ao determinante do reticulado em módulo). Dessa lista de reticulados só nos interessam os que são códigos perfeitos para A_2. Nesse sentido, faremos o “Teste de Injetividade", ou seja, verificamos se bolas centradas em diferentes pontos do código e de raio r são disjuntas. O “Teste de Injetividade"é baseado no teorema 6 de [3] e basicamente diz que, para cada $\Lambda \subset \Lambda_a$ consideramos um homomorfismo $\phi : A_2 \to G$, onde G é um grupo abeliano de cardinalidade igual ao determinante do código ($|G| = det(\Lambda)$). Dada a bola $\tilde{B}_p^n(r_i)$, vamos analizar a ação de ϕ nos pontos da bola $\tilde{B}_p^n(r_i)$. Se essa aplicação não for bijetora, descartamos o reticulado, caso contrário, pelo teorema temos que esse código é perfeito. E assim, para cada valor de p dado, saberemos a quantidade e para quais raios são obtidos códigos perfeitos, além de listar os códigos perfeitos no reticulado ambiente A_2.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da FAPESP (20/09838-0).

Referências

[1] J. H. Conway e N. J. A. Sloane. **Sphere packings, lattices and groups**. Vol. 290. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] S. I. R. Costa, F. Oggier, A. Campello, J.C. Belfiore e E. Viterbo. **Lattices applied to coding for reliable and secure communications**. Springer, 2017.

[3] P. Horak e B. F. AlBdaiwi. “Diameter perfect Lee codes”. Em: **IEEE transactions on information theory** 58.8 (2012), pp. 5490–5499.

[4] J. E. Strapasson e G. Strey. “Códigos Perfeitos Bidimensionais em Reticulados Algébricos”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 8.1 (2021).

[5] E. Strey. “Construçoes de reticulados a partir de códigos q-ários”. Tese de doutorado. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, 2017.

[6] G. R. A. S. Strey. “Códigos perfeitos e ladrilhamentos em diversos reticulados ambientes”. Tese de doutorado. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, 2020.