

Análise das Deflexões Grandes de uma Viga Com Rigidez Não Linear Utilizando a Linearização Exata a Realimentação

Celia A. dos Reis¹, Luis Antonio da S. Vasconcellos¹, Luttgardes de O. Neto², Rodrigo Rocha³

¹ Departamento de Matemática – Faculdade de Ciências – UNESP

² Departamento de Engenharia Civil – Faculdade de Engenharia – UNESP

³ Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia – UNESP

CEP 17033-360, BAURU/SP.

E-mail: celia@fc.unesp.br, toninho@fc.unesp.br, lutt@feb.unesp.br.

Resumo: *A equação de Duffing nas suas várias formas pode ser utilizada para descrever diversos sistemas não lineares. Embora a maioria dos sistemas físicos não possam ser descritos com precisão desta forma, para uma ampla gama de condições operacionais tais como a frequência e amplitude de excitação, em muitos casos, é possível a utilização desta equação como uma descrição aproximada, de modo que seu comportamento possa ser estudado qualitativamente. Neste trabalho considera-se a análise das deflexões grandes de uma Viga com rigidez não linear, cujo modelo matemático pode ser descrito por uma equação de Duffing. A linearização exata no espaço de estados é o método proposto para análise dessa dinâmica não linear. Apresenta-se a análise da dinâmica interna e da estabilidade assintótica local. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados.*

Palavras-Chave: *Equação de Duffing, Deflexão de Vigas, Linearização Entrada-saída, Estabilidade Assintótica.*

1 – Introdução

Os projetos de grandes estruturas que envolvem dados de difícil definição têm utilizado cada vez mais o recurso de monitoração durante a sua construção para tomadas de decisões. Nesses momentos, as comparações entre resultados da monitoração com os obtidos de modelos matemáticos têm permitido a continuidade na execução dessas obras com maior controle e qualidade [1]. A análise estrutural desempenha um papel importante no desenvolvimento do projeto de tais estruturas e modelos matemáticos cada vez mais sofisticados propiciam análises inimagináveis até alguns anos atrás, fornecendo subsídios para análises paramétricas e permitindo simulações de etapas construtivas com o nível de detalhamento desejado pelos projetistas [3].

É sabido que massa, mola e amortecedor são componentes básicos de sistemas oscilatórios (mesmo que só apareçam conceitualmente, no modelo matemático) e como os sistemas físicos são inerentemente não lineares, as não linearidades podem ser introduzidas nas equações diferenciais que governam os modelos matemáticos de tais sistemas, através desses componentes. Como exemplos de problemas de vibrações não lineares podem ser citadas as vibrações de vigas, de cabos, de um pêndulo, de alguns isoladores, de circuitos elétricos, cujos modelos matemáticos são muitas vezes descritos por equações do tipo da Equação de Duffing [4], [5].

Embora técnicas de análise de sistemas lineares sejam bastante desenvolvidas, atualmente a busca por métodos de análise e controle de sistemas não lineares está em franca expansão. Como exemplo pode-se citar técnicas não lineares baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov e métodos de linearização exata no espaço de estado [7], [16].

A linearização exata por realimentação (do inglês *Feedback Linearization*) é um procedimento que permite transformar a dinâmica de um sistema não linear, em uma dinâmica linear, mediante uma realimentação não linear dos estados ou da saída escolhida previamente. Além disso, é uma parte essencial para o desenvolvimento de controladores não lineares robustos e adaptativos [16]. Esta metodologia de análise (e projeto) de dinâmicas não lineares tem sido utilizada com êxito numa grande gama de aplicações, como em problemas de rastreamento, no controle de braços de robô e manipuladores, peças de artilharia, helicópteros,

aviões e satélites, além de ser usado em aparelhagem médica e nas indústrias química e farmacêutica [7], [13], [14] e [16]. Matematicamente, o que se faz é efetuar uma mudança de variáveis de estado (mudança de coordenadas) no sistema que se deseja linearizar, e introduzir uma variável de entrada auxiliar. Dependendo do caso, o sistema vai se tornar totalmente linearizado, ou somente em parte. Pode-se então utilizar de técnicas lineares conhecidas para provar o sistema em malha fechada com outras propriedades, tais como estabilidade e robustez [15].

Na linearização exata por realimentação existem dois métodos principais, a linearização entrada-estado e a linearização entrada-saída [7], [16]. A metodologia abordada nestas notas será a linearização entrada-saída, aplicada nas vibrações grandes de uma viga bi-apoiada, com rigidez não linear. O objetivo é decompor a dinâmica do sistema não linear que se deseja linearizar na chamada *forma normal*, isto é, em uma parte externa linear (entrada-saída) e uma parte interna não linear e não observável. Para tal, define-se um novo conjunto de estados, definidos a partir da saída e suas derivadas e prova-se a existência de um difeomorfismo, o qual transforma o sistema não linear em outro linear de menor grau, que relaciona a entrada e a saída, e uma parte não linear que representa os estados não observáveis, e que fornece a *dinâmica interna* do sistema original [8], [9].

O conhecimento da dinâmica interna é importante, pois, a partir de seu equacionamento, torna-se possível a análise da *dinâmica zero*, a qual pode ser utilizada para análise de estabilidade assintótica da dinâmica não linear, e assim avaliar se a linearização por realimentação pode ser usada (qualquer sistema em malha fechada tem que ser estável) [7], [16].

Como o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades com rigidez não linear e de comprimento l , pode ser modelada matematicamente por uma equação de Duffing.

Neste trabalho a linearização exata no espaço de estados é o método proposto para análise desta dinâmica. Apresenta-se a análise da dinâmica interna de tal sistema, a análise de estabilidade assintótica além da utilização desse método para apresentar uma lei de controle não linear que possibilita o controle das vibrações. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: na seção 2 apresenta-se a linearização entrada-saída para a viga bi-apoiada. Na seção 3 apresenta-se a análise da dinâmica interna, da dinâmica zero e da estabilidade assintótica local. Na seção 3 a análise de comportamento do sistema e o controle de oscilações. Na seção 4, apresentam-se exemplos numéricos e finalmente na seção 5, as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

2 – O Modelo Matemático Utilizado e a Linearização Entrada-Saída

Considere o oscilador de Duffing com uma força externa e um termo cúbico, dado por:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = F \cos \Omega t \quad (1)$$

sendo que x , ξ , α , γ , f , Ω são respectivamente o deslocamento, o raio de amortecimento, parâmetro de rigidez, parâmetro de rigidez não linear, amplitude de excitação e frequência de excitação, conforme [10], [12].

Na equação (1), quando $\xi = 0$ e $\alpha = l$, esta equação descreve o movimento do primeiro modo de vibração de uma viga bi-apoiada nas extremidades, de comprimento l , como na Figura (1). Nesta, considera-se o suporte do lado esquerdo fixo, e o da direita livre para deslizar com o objetivo de evitar alongamento no plano da viga quando esta vibrar. [10]. Supõe-se que o movimento na direção horizontal é desprezado e que a inércia de rotação da viga também é negligenciada. Além disso, denota-se por Q e M a força de cisalhamento e o momento de flexão, respectivamente. A densidade e área de uma seção transversal da viga são dadas por ρ e A , respectivamente, e tal que ρA é a massa da viga por unidade de comprimento.

Segundo [11], para grandes rotações da viga a curvatura é dada pela equação:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \left(1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}. \quad (2)$$

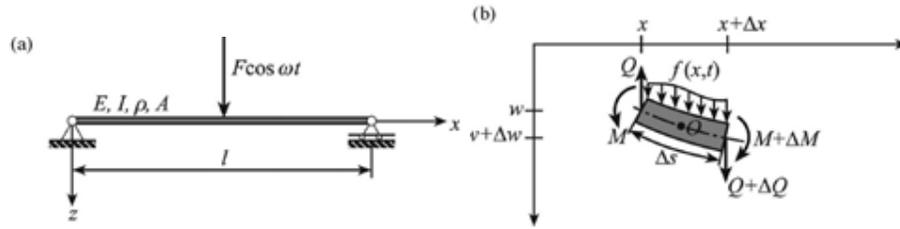


Figura 1: (a) Vibrações de uma viga com elasticidade não linear; (b) Elemento de área de comprimento Δs (Kovacic, I., Brennan, M. J., 2011).

Para a determinação de uma equação aproximada do movimento do primeiro modo de vibração da viga, seu deslocamento é escrito como o produto de seu modo de vibração $\varphi(x)$ e da amplitude modal $q(t)$, isto é:

$$w(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (3)$$

sendo L a distância entre os suportes da viga e:

$$\varphi(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4)$$

De acordo com [10], a força $f(x, t)$ atua por unidade de comprimento na viga e assumindo que esta é uma força ponto harmônica no tempo atuando no centro, então tem-se que:

$$f(x, t) = F\delta\left(\frac{x-l}{2}\right)\cos\omega t \quad (5)$$

sendo δ a função delta de Dirac.

Em [10] uma equação que representa o movimento do primeiro modo de vibração da viga, em termos de L é dada por:

$$m\ddot{q} + k_1q - k_3q^3 = F \cos \omega t \quad (6)$$

sendo:

$$m = \frac{\rho A l}{2} \quad k_1 = \frac{EI\pi^4}{(2L^3)} \quad k_3 = \frac{-3\pi^6 EI}{(16L^5)} \quad (6-a)$$

Como L não é constante [10], a função da amplitude de deslocamento tem a forma:

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \left(\frac{q\pi}{2l} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

Após a substituição de (7) em (6) seguido do desprezo de potências de q maiores do que três, k_1 e k_3 podem ser escritos como:

$$k_1 = \frac{EI\pi^4}{(2l^3)} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{-3\pi^6 EI}{(16l^5)} \quad (8)$$

De (8), o termo cúbico da equação (6) é positivo, e daí a viga apresenta rigidez para grandes deflexões.

Conforme [10], a equação (6) pode ser escrita como:

$$\ddot{\tilde{y}} + \tilde{y} + \tilde{\gamma}\tilde{y}^3 = \tilde{F} \cos \Omega \tilde{t} \quad (9)$$

sendo:

$$\tilde{y} = \frac{q}{l}, \quad \tilde{t} = w_n t, \quad \Omega = \frac{w}{w_n}, \quad w_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{k_1 l}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{l^2 k_3}{k_1}.$$

A equação (9) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y} &= h(x) \end{aligned} \quad (10)$$

sendo:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - \gamma x_1^3 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}(\tilde{t}) = \tilde{F} \cos \Omega \tilde{t} \quad \text{e} \quad \tilde{y}(\tilde{t}) = ax_1 + bx_2, \quad b \neq 0, \quad (10-a)$$

Derivando a saída na equação (10-a), tem-se que:

$$\dot{y} = ax_2 + b(-x_1 - \gamma x_1^3 + u(t)). \quad (11)$$

De (11) tem-se que o grau do sistema é $r = 1$, sendo possível a análise da dinâmica interna e da dinâmica zero do sistema (10) ([7] e [16]).

Note que se a saída é definida como sendo $y = ax_1$, o grau do sistema é 2 e então não se aplica a linearização entrada-saída [7] e [16]. Daí a necessidade de $b \neq 0$.

Para a construção do difeomorfismo $\phi(x) = (\mu, \psi)$ basta tomar:

$$\phi = [ax_1 + bx_2, \psi] \quad (12)$$

sendo ψ uma solução do conjunto de EDP, pelo Teorema de Frobenius [16]

$$\nabla \psi g = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_2} = 0 \quad (13)$$

Uma solução para a EDP (13), é dada como sendo a combinação linear do estado x_1 , isto é:

$$\psi(x) = cx_1. \quad (14)$$

Assim, a função $\phi(x)$ dada pela equação (12) tem a forma:

$$\phi(x) = [\mu, \psi] = [ax_1 + bx_2, cx_1]. \quad (15)$$

De (15), nota-se que $\phi(x)$ é um difeomorfismo global. De fato, de (14) e (15) $\nabla \phi \neq 0$ e:

$$x_1 = \frac{1}{c}\psi \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{b}\mu - \frac{a}{bc}\psi \quad (16)$$

e portanto $\phi(x)$ é inversível com inversa:

$$\phi^{-1}(\mu, \psi) = \left(\frac{1}{c}\psi, \frac{1}{b}\mu - \frac{a}{bc}\psi \right). \quad (16-a)$$

A partir do conjunto de estados definidos em (15), o sistema (2) pode ser escrito na *forma normal* [7] e [16]:

$$\dot{\mu} = \left(\frac{a}{b} \right) \mu - \frac{1}{c} \left(\frac{a^2}{b} + b \right) \psi - \frac{\gamma b}{c^3} \psi^3 + b \tilde{u}(\tilde{t}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{c}{b} \mu - \frac{a}{b} \psi \\ \tilde{y} &= \mu \end{aligned} \quad (17-a)$$

Note que (17) relaciona entrada-saída, correspondendo a parte externa do sistema, enquanto que (17-a) corresponde a parte interna da dinâmica, não dependente da entrada $u(t)$. Portanto, (17-a) corresponde a parte não observável do sistema físico.

A dinâmica não linear (17), que corresponde à parte externa de (10), pode ser linearizada. De fato, basta tomar a entrada:

$$\tilde{u}(\tilde{t}) = \frac{1}{b} \left\{ \left(-\frac{a}{b} \right) \mu + \frac{1}{c} \left(\frac{a^2}{b} + b \right) \psi + \frac{\gamma b}{c^3} \psi^3 + v \right\}. \quad (18)$$

A substituição de (18) em (17), gera:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= [v] \\ \dot{\psi} &= \frac{c}{b} \mu - \frac{a}{b} \psi \\ y &= \mu \end{aligned} \quad (19)$$

2. A Análise da Dinâmica Zero do Sistema e da Estabilidade Assintótica Local

De (10), e como $\alpha = 1 \neq 0$, tem-se que a dinâmica não linear tem três pontos críticos, a saber:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = \left(\sqrt{\frac{-1}{\gamma}}, 0 \right) \text{ e } P_3 = \left(-\sqrt{\frac{-1}{\gamma}}, 0 \right). \quad (20)$$

se $\gamma < 0$ e um único ponto crítico, a saber $(0, 0)$, se $\gamma > 0$.

De (10) ou (17), tem-se a matriz da contraparte linear com dois autovalores distintos e imaginários puros. Isso significa que $(0,0)$ é um centro para o sistema linear correspondente da dinâmica (10) ou (17), estável. Para a dinâmica não linear (10) ou (17) esse ponto crítico pode ser um centro ou um ponto em espiral, assintoticamente estável, ou estável, mas não assintoticamente estável ou instável. Desta forma, não é possível estabelecer uma conclusão a respeito da estabilidade assintótica do ponto crítico $(0, 0)$ e nem de sua natureza.

De (19) a *dinâmica zero* é dada quando $y(t) = 0$ para todo $t > 0$, o que implica $\mu(t) = 0 \ \forall t$. Daí, a *dinâmica zero* é dada por [7] e [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{a}{b}\psi \\ y &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

cuja resposta no tempo é dada pela expressão:

$$\psi(\tilde{t}) = e^{\left(-\frac{a}{b}\right)\tilde{t}}. \quad (22)$$

Isto significa que existe uma subvariedade M_o no espaço de estados na qual a saída e suas derivadas são todas nulas, isto é, $\tilde{y}^{(n)}(\tilde{t}) = 0 \ \forall t$, e então os estados que se iniciam em M_o permanecem em M_o , daí, $\dot{\mu} = 0$ e $\dot{\psi} = W(0, \psi)$, gerando a *dinâmica* (22).

Assim, de (22), a *dinâmica zero* (21) é assintoticamente estável quando $a, b < 0$ ou $a, b > 0$, em torno da origem. Esta informação é importante pois pode ser utilizada para estabilizar localmente, em malha fechada, o sistema não linear (10) ou (17) - (17-a) [16].

De fato, considerando-se o controle não linear:

$$\tilde{u}(\tilde{t}) = \frac{1}{b} \left\{ \left(-\frac{a}{b}\right)\mu + \frac{1}{c} \left(\frac{a^2}{b} + b\right)\psi + \frac{\gamma b}{c^3}\psi^3 - \tilde{v} \right\} \quad (23)$$

para $v = -k_o y = -k_o a x_1 - k_o b x_2$, e k_o escolhido de forma conveniente tal que $p(\lambda) = \lambda + k_o$ seja um polinômio de grau um e com raízes negativas [16], torna a malha fechada da dinâmica (10) assintoticamente estável em torno da origem.

Nota-se, nesse caso, que $p(\lambda) = \lambda + k_o$ tem raízes negativas se e somente se $k_o > 0$.

Observa-se, a vantagem da linearização entrada-saída para o estudo da estabilidade assintótica da dinâmica não linear. Pelos resultados clássicos existentes na literatura [5] e [6], não é possível determinar se a dinâmica não linear é estável, mas não assintoticamente estável, assintoticamente estável ou instável. Pela análise da *dinâmica zero* foi possível determinar a estabilidade assintótica da dinâmica não linear em torno da origem.

A Figura 2 mostra o efeito na resposta do sistema não linear (10), da lei de controle (23), de acordo com os valores dos parâmetros adotados na Tabela 1.

Considerando um exemplo prático com dimensões realistas de uma viga metálica, pode-se avaliar o comportamento da viga em função dos dados de controle. Para uma resposta dinâmica inicial, avalia-se a influência do comprimento da viga no problema. Assim os dados de duas situações estão dispostos na Tabela 1, mantendo constante o perfil metálico, e como peso distribuído apenas o seu peso próprio. Considera-se um intervalo de tempo de 0 a 10.000 s, na Figura 2 – a, para que se perceba o comportamento assintoticamente estável do sistema, já que a rigidez nesse caso é grande e o sistema não apresenta amortecimento. Na figura 2: -b o tempo de simulação considerado foi de 500 segundos.

Verifica-se nas Figuras 2: a e b, o quanto é eficiente o controle dado por (23), já que este leva a resposta para a origem em um tempo muito pequeno.

Tabela 1. Valores de parâmetros, nos casos 1 e 2.

Parâmetro	α	Ω	γ	F	a	b	c	ko	l cm	L cm	I cm ⁴
Caso 1	1	0,5	5	0,3	1	1	1	1	400	400	4616
Caso 2	1	0,5	5	0,3	1	1	1	1	1000	1000	4616

Como informações adicionais à Tabela 1, ainda são consideradas as seguintes informações:

- Módulo de Young do aço, $E = 20.000 \text{ kN/cm}^2 = 2.000 \text{ tf/m}^2 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kgf/cm}^2 = 2,0 \cdot 10^9 \text{ gf/cm}^2$;
- Peso específico do Aço $m = 77 \text{ kN/m}^3 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kgf/m}^3 = 7,7 \cdot 10^3 \text{ kgf/10}^6 \text{ cm}^3 = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3 = 7,7 \text{ gf/cm}^3$;
- Força : $40 \text{ kN} = 4,0 \text{ tf} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ gf}$.

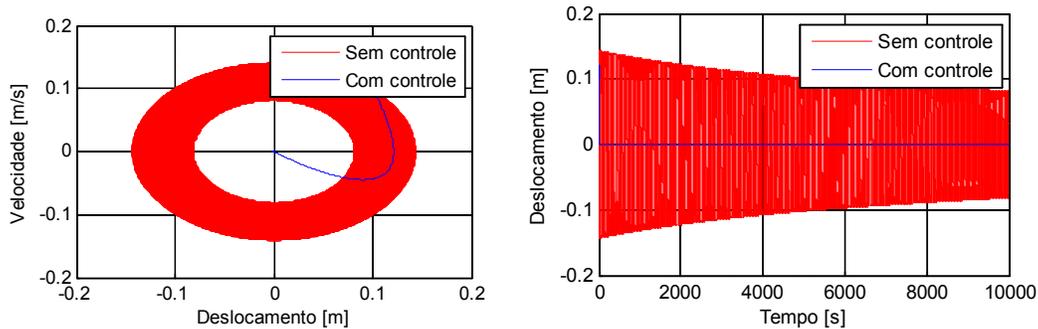


Figura 2-a: Retrato de fase à esquerda e histórico do deslocamento no tempo à direita com os parâmetros da Tabela 1 – Caso 1, para $u(t) = F \cos \Omega t$.

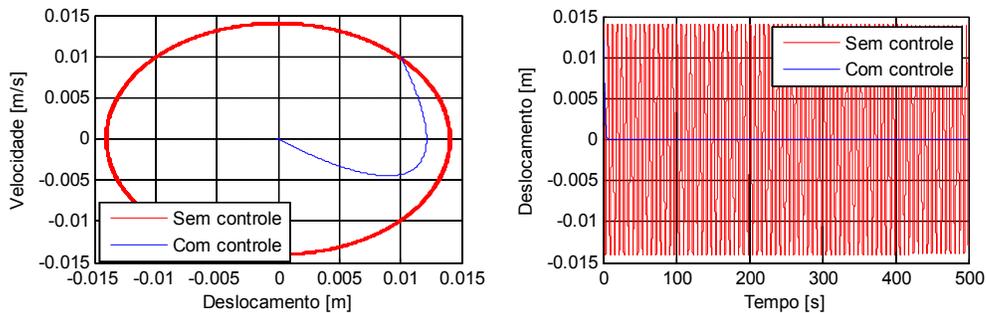


Figura 2-b: Retrato de fase e histórico do deslocamento no tempo com os parâmetros da Tabela 1 – Caso 2, para $u(t) = F \cos \Omega t$.

4 – Conclusão

Neste trabalho considerou-se a análise das deflexões grandes de uma Viga com rigidez não linear, cujo modelo matemático utilizado é descrito por uma equação de Duffing. A linearização exata no espaço de estados foi o método proposto para análise dessa dinâmica não linear. Mediante a análise da dinâmica interna do sistema, provou-se que a dinâmica não linear é assintoticamente estável em torno da origem. Esse resultado é interessante pois, como os autovalores da dinâmica linear correspondente são imaginários puros, os resultados existentes na literatura, não permitem essa avaliação. Finalmente, exemplos numéricos foram apresentados, levando-se em conta a análise da esbelteza da viga.

Para trabalhos futuros, deseja-se analisar a primeira deflexão da viga para uma carga constante, além de uma análise das vibrações resultantes dessa carga, após um intervalo de tempo. Além disso, deseja-se avaliar a ação dessa carga, para uma viga esbelta, a ponto de levar a mesma a uma ruptura.

5 – Referências

- [1] R.D. Copetti, D. Migotto, D. R. Tolfo, “Sobre a Resposta Dinâmica de uma Viga com Amortecimento, Mecânica Computacional”, Vol. XXIX, págs. 4247-4254, Argentina, Nov., 2010.
- [2] N. Fiedler-Ferrara, C. P.C. Prado, *Caos – Uma introdução*, Edgar Blucher, S.P., 2009
- [3] P. B. Fusco, “Estruturas de Concreto”, Editora Guanabara, 1991.
- [4] J. Ginsberg, “Mechanical and Structural Vibrations”, John Wiley, 2002.
- [5] D. Gorman, “Free Vibration Analysis of Beams and Shafts”, John Wiley, 1975.
- [6] M. Gürgöze, H. Erol, “Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition”, *Journal of Sound and Vibration*, 298:132”U153, 2006.
- [7] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, 3ed., Springer-Verlag, Roma, 1995.
- [8] M. K. Jain, S. R. K. Iyengar, R. K. Jain, “Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation”, Ed. John Wiley & Sons, 1985.
- [9] S. G. Kelly, “Advanced Vibration Analysis”, John Wiley, 1 st edition, 2006.
- [10] I. Kovacic,, M. J. Brennan- *The Duffing Equation Nonlinear Oscillators and Their Behavior*, Wiley & Sons, 2011.
- [11] S. Naguleswaran, “Vibration of an Euler-Bernoulli beam on elastic end supports and with up to three step changes in cross-section”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 44:2541– 2555, 2002.
- [12] S. S. Raos, *Mechanical Vibrations*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- [13] C. A. Reis *et al.*, *Asymptotic Stabilization and Internal Dynamics of a Simplified Model of a Maglev System*, 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), November 3-7, Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013.
- [14] C. A. Reis *et al.*, *The Input-State Linearization Of A Maglev Vehicle Type*, 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM), November 3-7, Ribeirão Preto, SP, Brazil, 2013.
- [15] G. V. M. Silva, *Controlo Não Linear*, Escola Superior de Tecnologia Setúbal, Lisboa, 2003.
- [16] J. Slotine and W. LI, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice Hall, 1991.