Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy Aplicado aos Dados da População Brasileira

Samanta T. D. Palma [1], Rosana S. M. Jafelice [2], Ana M. A. Bertone[3]
IME/UFU, Uberlândia, MG
Jefferson B. Martins[4]
EBTT/IFTM, Uberaba, MG

**Resumo**. O objetivo deste trabalho é resolver numericamente o modelo de Montroll com retardo, considerado como número real e fuzzy, cujos parâmetros são obtidos por meio de dados da população brasileira entre os anos de 1991 e 2022. Completando o estudo, analisa-se a estabilidade do modelo de Montroll com retardo real e fuzzy. A solução numérica é obtida utilizando o método dos Passos combinado com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com implementação computacional própria. As incertezas do retardo fuzzy são incorporadas na solução do modelo através do Princípio da Extensão de Zadeh. A média aritmética dos erros relativos entre a solução defuzzificada com retardo fuzzy e os dados da população brasileira é menor do que a mesma métrica aplicada ao modelo de Montroll sem retardo.

**Palavras-chave**. Modelo de Montroll, Equações Diferencias com Retardo, Extensão de Zadeh.

## 1 Introdução

Os modelos populacionais permitem explicar matematicamente o comportamento do crescimento ou decrescimento das populações, fornecendo ferramentas essenciais para analisar fenômenos demográficos. Apesar de suas contribuições, esses modelos nem sempre refletem a realidade de forma precisa, pois não consideram fatores como os processos de fecundação, o tempo necessário para atingir a maturidade sexual ou o impacto de eventos temporais específicos na dinâmica populacional. Nesse contexto, os modelos populacionais com retardo temporal surgem como uma extensão necessária. Uma das formas de resolver estas equações é a utilização do método dos Passos [1].

Nas últimas décadas, a teoria de conjuntos fuzzy emergiu como uma ferramenta poderosa para modelar fenômenos incertos. Proposta por Zadeh em 1965 [6] visa lidar com a imprecisão e a incerteza presentes no raciocínio humano. Em particular, em 1975, Zadeh introduziu o Princípio de Extensão, que permite gerar novos conjuntos fuzzy a partir de um conjunto inicial e uma função entre seus universos [7].

O objetivo deste trabalho é obter uma solução numérica e estudar a estabilidade do modelo de Montroll com retardo real e fuzzy, utilizando os dados da população brasileira entre os anos 1991 e 2022. Essa abordagem de incorporar no modelo de Montroll clássico, o retardo, é útil para representar situações em que o efeito de uma variável sobre outra não é imediato, mas ocorre com um certo retardo temporal. A solução numérica do modelo é obtida por meio de um algoritmo próprio,

[1]samanta.palma@ufu.br
[2]rmotta@ufu.br
[3]amabertone@ufu.br
[4]jefferson@iftm.edu.br

que combina o método dos Passos [1] com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, permitindo lidar eficientemente com o problema de valor inicial de Montroll.

## 2 Modelo de Montroll sem e com Retardo

O modelo de Montroll é dado pelo PVI: $\dfrac{dP}{dt} = rP\left[1 - \left(\dfrac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right], \alpha > 0, r > 0, P(0) = P_0$, em que $P = P(t)$ é a população no tempo $t$, $r$ é a taxa de crescimento relativa, $P_\infty$ é a capacidade suporte e $\alpha$ é o indicador da posição do ponto de inflexão da curva. A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{[(P_\infty^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha r t} + P_0^\alpha]^{1/\alpha}}. \tag{1}$$

Para realizar a análise de crescimento populacional são utilizados os dados da população do Brasil obtidos do *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística* (IBGE).

Tabela 1: Dados da população brasileira.

| Ano | População Brasileira |
|---|---|
| 1991 | 146.917.459 |
| 2000 | 169.590.693 |
| 2010 | 190.755.799 |
| 2022 | 203.080.756 |

Logo, a equação diferencial do modelo de Montroll verifica:

$$\frac{dP}{dt}\frac{1}{P} = r\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right] = r + \left(-\frac{r}{P_\infty^\alpha}\right)P^\alpha \approx c + aP^\alpha, \tag{2}$$

em que $c = r$ e $a = -\dfrac{r}{P_\infty}$. Assim, usando o toolbox `cftool` do MATLAB com os dados da Tabela 1, através do método de mínimos quadrados [2], para valores de $\alpha$ entre $0,01 \leq \alpha \leq 2,08$ com espaçamento de 0,01, determina-se o maior coeficiente de determinação ($R^2$) igual a $0,9658$ quando $\alpha = 0,01$. Para $0,008 \leq \alpha \leq 0,012$ com espaçamento 0,001, o $R^2$ é o mesmo. Assim, é considerado $\alpha = 0,01$, $c = r = 4,05$, $a = -3,341$ e $P_\infty \approx 227.957.958$.

O modelo de Montroll com retardo é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left[1 - \left(\frac{P(t-\tau)}{P_\infty}\right)^\alpha\right] \tag{3}$$

em que $\tau > 0$ é o retardo. A interpretação biológica deste modelo é que o efeito regulador no tempo $t$ depende da população no tempo anterior $(t-\tau)$ ao invés de $t$ [4]. Resolver o modelo de Montroll com retardo de forma analítica, pode ser complexo devido à presença do termo $P(t-\tau)$, que introduz uma dependência no tempo passado. Neste trabalho é adotada uma abordagem numérica para obter soluções aproximadas, permitindo a análise do comportamento da população sob diferentes condições iniciais e parâmetros do modelo. Assim, foi desenvolvido um programa computacional que encontra uma solução numérica por meio do método dos Passos [1], juntamente com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, cujo algoritmo é apresentado na Figura 1.

**Algoritmo 1: Solução Numérica de uma Equação Diferencial Ordinária com Retardo: Modelo de Montroll**

**Entrada:** $P_0$ =valor inicial, $P_\infty$ =capacidade suporte, $\alpha, \lambda$
**Entrada:** $\tau$, retardo, $\phi$ histórico do retardo
**Entrada:** $T$ = tempo final
**Entrada:** $N = \#$ de pontos da malha do *tempo*
**Entrada:** $tempo = \bigcup_{i=1}^{N} [(i-1)h, ih]$, $h = T/N$
**Entrada:** $steps$ = inteiro menor ou igual a $(T/\tau)$
**Entrada:** $F$ = expressão da função de Montroll
**Saída:** $Y(tempo) = \bigcup_{k=1}^{steps} Y_k(Int_k)$, $Int_k$=intervalo no *step* $k$

**início**
  **para** *cada* $j = 1 \ldots steps$ **faça**
    **para** *cada* $i = 1 \ldots N$ **faça**
      **Se** $(j-1) * \tau \leq tempo(i) \leq j * \tau \leftarrow Int_j(i) = tempo(i)$
    **fim**
  **fim**
**fim**
**Defina** $M = \min_j(\text{comprimento } Int_j)$ **e** $Y_1(1) = P_0$
**para** *cada* $i = 1 \ldots M-1$ **faça**
  $K1 = h(F(Y_1(i), \phi(Int_1(i) - \tau)))$
  $K2 = h(F(Y_1(i) + 0.5 * K1, \phi(Int_1(i) + 0.5h - \tau) + 0.5K1))$
  $K3 = h(F(Y_1(i) + 0.5K2, \phi(Int_1(i) + 0.5h - \tau) + 0.5K2))$
  $K4 = h(F(Y_1(i) + K3, \phi(Int_1(i) + h - \tau)) + K3)$
  $\longleftarrow \; Y_1(i+1) = Y1(i) + (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4)/6$
**fim**
**Defina** $Y_k(k\tau) = Y_{k-1}(k\tau)$
**para** *cada* $k = 2 \ldots steps$ **faça**
  **para** *cada* $i = 1 \ldots M-1$ **faça**
    $K1 = h(F(Y_k(i), Y_k(i)))$
    $K2 = h(F(Y_k(i) + 0.5K1, 0.5(Y_{k-1}(i)$
      $+Y_{k-1}(i+1)) + 0.5K1)))$
    $K3 = h(F(Y_k(i) + 0.5K2, 0.5(Y_{k-1}(i)$
      $+Y_{k-1}(i+1)) + 0.5K2))$
    $K4 = h(F(Y_k(1) + K3, Y_{k-1}(i+1) + K3))$
    $\longleftarrow \; Y_k(i+1) = Y_k(i) + (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)/6$
  **fim**
**fim**

Figura 1: Algoritmo base do programa computacional utilizado neste estudo. Fonte: os autores.

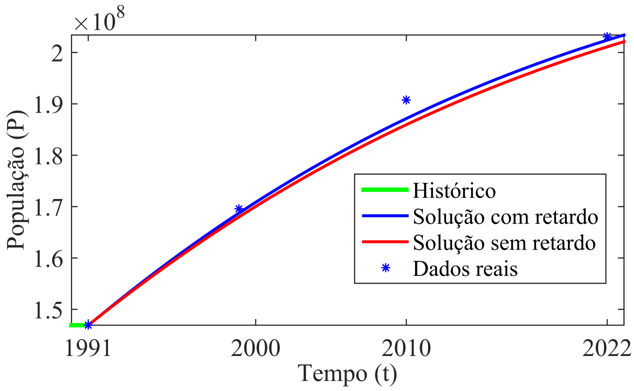



Figura 2: Solução numérica com retardo (azul), solução analítica sem retardo (vermelha) e os dados da população brasileira. Fonte: os autores.

A aproximação da solução de (3) para os dados da população brasileira considerando o valor inicial $P_0 = 146.917.459$, a capacidade suporte $P_\infty = 227.957.958$, $\alpha = 0,01$, $r = 4,05$, o histórico $\phi(t) = 146.917.459$ com o valor do retardo $\tau = 1$. Na Figura 2 são apresentadas a solução numérica de (3) (curva azul), a solução do modelo de Montroll sem retardo (curva vermelha), juntamente com os dados da Tabela 1.

São calculados as médias do erros relativos para comparar a solução analítica e a aproximação numérica com os dados da população brasileira. Sendo $C_R$ a média do erro relativo da solução do modelo de Montroll com retardo em relação aos dados da população brasileira, tem-se $C_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$, em que $R_i = \frac{|P_i - P_{r_i}|}{|P_i|}$, $P_i$ são os dados da população brasileira e $P_{r_i}$ é a solução numérica do modelo de Montroll com retardo nos pontos correspondentes. Além disso, calcula-se $S_R$ que é a média do erro relativo da solução do modelo de Montroll sem retardo em relação aos dados da população brasileira, i.e., $S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n}$ sendo $S_i = \frac{|P_i - P_{s_i}|}{|P_i|}$ em que $P_{s_i}$ é a solução analítica do modelo de Montroll sem retardo nos pontos correspondentes. Os resultados obtidos são: $C_R = 0,006406541549949$ e $S_R = 0,009890714919669$, o que mostra que a média dos erros relativos do modelo com retardo em relação aos dados da população brasileira é menor do que a do modelo sem retardo.

Para o estudo da estabilidade da equação (3), revisam-se alguns conceitos a seguir. Uma equação diferencial autônoma de primeira ordem é uma equação autônoma de primeira ordem é da forma $y' = F(y)$, em que $y = y(x) \in \mathbb{R}$ e $F$ é uma função real contínua. Os pontos de equilíbrio de uma equação diferencial $y' = F(y)$ são aqueles que satisfazem $F(y) = 0$. Um ponto de equilíbrio $\tilde{y}$ da equação $y' = F(y)$ é dito estável se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, dependendo de $\varepsilon$, tal que, para qualquer $y_0$ para o qual $|y_0 - \tilde{y}| < \delta$, a solução $\phi(x, y_0)$ do PVI, dado por $y' = F(y)$ e $y(0) = y_0$, satisfaz a desigualdade $|\phi(x, y_0) - \tilde{y}| < \varepsilon$, para todo $x \geq 0$ [3]. Caso contrário, o ponto diz-se instável [3]. Um ponto de equilíbrio $\tilde{y}$ da equação $y' = F(y)$ é dito assintoticamente estável, se $\tilde{y}$ é um ponto de equilíbrio estável e $\lim_{x\to\infty} \phi(x, y_0) = \tilde{y}$.

Para o estudo da estabilidade do modelo de Montroll com retardo aplica-se a linearização em duas variáveis nos pontos de equilíbrio obtendo as seguintes conclusões:

(1) Para $P = 0$, a equação linearizada é $\dfrac{dP}{dt} = rP$. Assim, a análise da solução quando $t \to \infty$ é $\lim_{t\to\infty} P_0 e^{rt} = \infty$, o que mostra que $P = 0$ é instável.

(2) Para $P = P_\infty$, a equação linearizada é $\dfrac{dP}{dt} = -(P(t-\tau) - P_\infty)\alpha r$, cuja equação característica de variável $z$ complexa é dada por:

$$z + r\alpha e^{-z\tau} = 0, \tag{4}$$

em que $z = a + bi$. Tem sido mostrado em [5] que para os dados da população brasileira a equação (4) com os valores de $r = 4,05$, $\alpha = 0,01$, $\tau = 1$ cumpre que, $r < \frac{1}{e\alpha}$. Ou seja, tem-se duas raízes negativas que são $a_1 = -4,7689$ e $a_2 = -0,0426$, determinadas computacionalmente através do método da Bisseção [2]. Para os autovalores reais da solução analítica $x(t) = ce^{at}$ com $a < 0$ tem-se: $\lim_{t\to\infty} ce^{at} = 0$ e, devido à mudança de variavel $x(t) = P(t) - P_\infty$, então $P(t) \to P_\infty$ quando $t \to \infty$. Assim, considerando as duas raízes negativas $a_1$, $a_2$ e substituindo na solução linearizada da equação $\dfrac{dP}{dt} = -(P(t-\tau) - P_\infty)\alpha r$ e $P(t) = x(t) + P_\infty$, tem-se:

1. Para $a_1 = -4,7689$, com a condição inicial $P(0) = 146.917.459$, é obtido

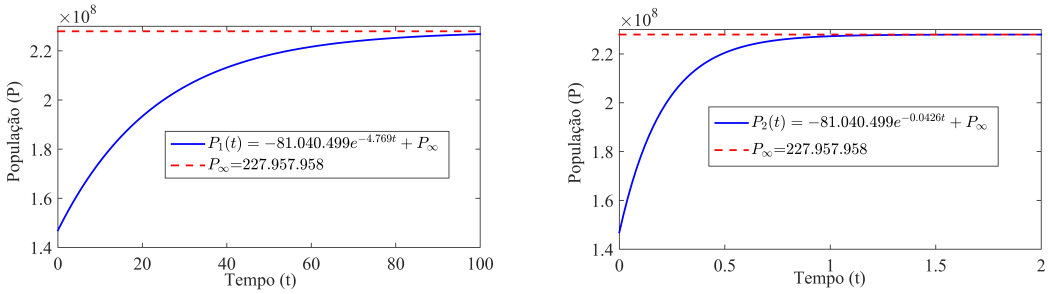
   $$P(t) = -81.040.499e^{-4,769t} + 227.957.958 \text{ (Figura 3(a))};$$

2. para $a_2 = -0,0426$, com a condição inicial $P(0) = 146.917.459$, é obtido

   $$P(t) = -81.040.499e^{-0,0426t} + 227.957.958. \text{ (Figura 3(b))}.$$

Na Figura 3 são apresentadas graficamente as soluções para as raízes negativas.




(a) (b)

Figura 3: Solução linearizada da equação (3) no ponto de equilíbrio $P = P_\infty$ para duas raízes negativas $a_1$ e $a_2$. Fonte: os autores.

# 3 Modelo de Montroll com Retardo Fuzzy

Começa-se esta seção lembrando algumas definições da teoria dos conjuntos fuzzy [6].

Um conjunto fuzzy $A$ de um universo $\mathcal{U}$ é o gráfico da sua função de pertinência $u_A$, isto é, $A = \{(x, u_A(x)) \mid x \in \mathcal{U}\}$. Define-se para $\alpha \in (0,1]$, o $\alpha$-nível de $A$, denotado por como $[A]^\alpha$ como sendo o conjunto $\{x \in \mathcal{U} \mid u_A(x) \geq \alpha\}$. O suporte do onjunto fuzzy $A$ denotado por supp$(A)$ é o conjunto definido por $\{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) > 0\}$. O nível zero de $A$ é dado por: $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$, em que $\overline{\text{B}}$ é o fecho topológico do conjunto $B$.

Sejam $f : \mathcal{U} \to Z$ uma função e $A$ um conjunto fuzzy definidos em $\mathcal{U}$. A extensão de Zadeh de $f$ é a função $\hat{f}$ que, aplicada a $A$, fornece o conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de $Z$, cuja função de pertinência é dada por

$$u_{\hat{f}(A)}(x) = \sup_{x \in f^{-1}(z)} u_A(x), \text{ se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \text{ ou } 0, \text{ se } f^{-1}(z) = \emptyset, \text{ sendo } f^{-1}(z) = \{x | f(x) = z\}.$$

Considere o modelo de Montroll com retardo fuzzy definido como:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left[1 - \left(\frac{P(t-\tau)}{P_\infty}\right)^\alpha\right], \tag{5}$$

em que $\tau \in [T]^0$ sendo $T$ um conjunto fuzzy determinado empiricamente a partir dos dados da Tabela 1. A função de pertinência utilizada é de tipo triangular e analiticamente definida por:

$$u_T(\tau) = \frac{\tau - 0,032}{0,968} \text{ se } 0,032 \leq \tau < 1; \quad u_T(\tau) = \frac{6,4 - \tau}{5,4} \text{ se } 1 \leq \tau \leq 6,4; \quad 0, \text{ caso contrário.}$$

A seguir, é apresentada a fuzzificação da solução do modelo de Montroll através do Princípio de Extensão de Zadeh em cada instante $t$, resultando uma família de soluções numéricas para a equação (5), com os seus respectivos graus de pertinência.

Na Figura 4(a) é apresentada a solução numérica da equação (5) com $\tau$ o parâmetro fuzzy triangular determinado para os dados da população brasileira, mostrando que o grau de pertinência aproxima-se de 1 (cor amarela). Assim, para os valores de $\tau \in \overline{\text{supp}(T)}$ tem-se a faixa da curvas da solução projetada no plano $xOy$ com os dados da população brasileira na Figura 4(b).

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0314  

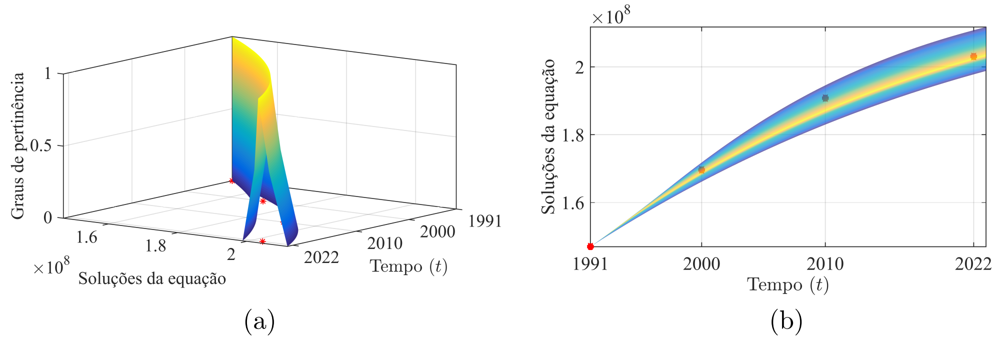



Figura 4: Fuzzificação da solução do modelo de Montroll através Princípio de Extensão de Zadeh em cada instante $t$. Fonte: os autores.

A defuzzificação, isto é, a transformação de um conjunto fuzzy em um número real, é realizada para solução do modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular em cada instante $t$. Entre as trajetórias que compõem a família de soluções de (5), seleciona-se o valor numérico da população $P(t)$ em cada instante $t$, considerando os dados da população brasileira. Seja $W_t$ o conjunto fuzzy que descreve todas as possíveis trajetórias $P(t)$ da população, calculadas a partir dos dados e parâmetros fuzzy no modelo, com função de pertinência $u_{W_t}$, definida através do método do centro de gravidade, como sendo $P(t) = \frac{\int_{supp(W_t)} P_t u_{W_t}(P_t) dP_t}{\int_{supp(W_t)} u_{W_t}(P_t) dP_t}$.

Na Figura 5 (a) são apresentados o gráfico da defuzzificação obtido através do método fuzzy da Extensão de Zadeh e a solução do modelo de Montroll sem retardo, em particular para os quatro tempos correspondentes da população brasileira mostrados na Figura 5 (b).

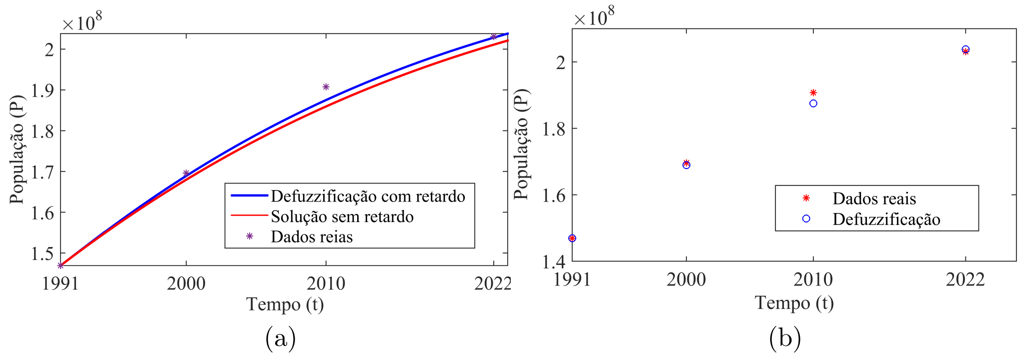



Figura 5: Defuzzificação da solução do modelo de Montroll com retardo, sendo um número fuzzy triangular. Fonte: os autores.

A média aritmética do erros relativos dos dados da população brasileira com os dados da solução do modelo de Montroll sem retardo é igual a 0,0099 e com os dados da solução defuzzificada com retardo é igual a 0,0061. Assim, o processo de defuzzificação do método fuzzy em cada instante $t$ está mais próxima dos dados da população brasileira.

O estudo de estabilidade assintótica para o modelo de Montroll com retardo fuzzy é análogo ao modelo com retardo, obtendo-se a estabilidade assintótica para os valores de $\tau \in \overline{\text{supp}(T)}$. De fato, para cada valor do retardo $\tau \in \overline{\text{supp}(T)} = [0,032, 6,4]$ se cumpre $r < 5,748 \leq \frac{1}{e\alpha\tau} \leq 1135,43$ para $r = 4,05$ e $\alpha = 0,01$. Assim, considerando diferentes valores de $\tau$ na primeira coluna da Tabela 2, apresenta-se na segunda coluna os respectivos graus de pertinência e na terceira as correspondentes raízes negativas.

Tabela 2: Valores de $\tau$ com seu grau de pertinência $u_T(\tau)$ e raízes negativas.

| $\tau$ | $u_T(\tau)$ | Raízes negativas |
|---|---|---|
| 0,032 | 0 | $a_1 = -295,0004$ e $a_2 = -0,04053$ |
| 0,32 | 0,2975 | $a_1 = -19,26513$ e $a_2 = -0.04513$ |
| 1 | 1 | $a_1 = -4,76807$ e $a_2 = -0,04248$ |
| 3,2 | 0,5926 | $a_1 = -1,00283$ e $a_2 = -0,04726$ |
| 6,4 | 0 | $a_1 = -0,32539$ e $a_2 = -0,05898$ |

# 4 Considerações Finais

Neste trabalho é apresentado o modelo de Montroll com retardo fuzzy cujos parâmetros tem sido obtidos através de dados da população brasileira entre os anos de 1991 a 2022. Tem-se abordado sua formulação matemática e obtido uma solução numérica feita por meio do método dos Passos combinado com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Como consequência a formulação de um programa computacional próprio que permitiu um estudo mais aprofundado e detalhado das particularidades do modelo e dos dados utilizados.

A fuzzificação da solução em cada instante é construída através do Princípio de Extensão de Zadeh que mostrou trajetórias, intervalos de convergência e estabilidade definidos com graus de pertinência. Assim, evidenciando sua eficácia na descrição de dinâmicas populacionais complexas. Novamente este estudo reforça o potencial dos métodos numéricos e fuzzy para a análise de equações com retardo e sua aplicação em fenômenos reais.

# Agradecimentos

A primeira autora agradece à CAPES pelo auxílio financeiro. A segunda e a terceira autoras agradecem à PROPP- UFU pelo apoio ao projeto DIRPE/PSFE No 006/2023.

# Referências

[1] M. Bashier e E. Bashier. “Fitted Numerical Methods for Delay Differential Equations Arising in Biology”. Tese de doutorado. University of the Western Cape, 2009.

[2] R. L. Burden, J. D. Faires e A. M. Burden. **Numerical Analysis**. 10ª ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2015. ISBN: 978-1-305-25366-7.

[3] J. K. Hale e S. M. V. Lunel. **Introduction to Functional Differential Equations**. Vol. 99. Applied Mathematical Sciences. New York, NY: Springer, 1993. ISBN: 978-0-387-94076-2.

[4] J. Murray. **Mathematical Biology: An Introduction**. 3rd. Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 0-387-95223-3.

[5] S. T. D. Palma. “Estudo da Estabilidade de um Modelo Populacional com Retardo Fuzzy”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Uberlândia, 2025.

[6] L. A. Zadeh. “Fuzzy sets”. Em: **Information and Control** 8.3 (1965), pp. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.

[7] L. A. Zadeh. “The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II”. Em: **Information Sciences** 8.4 (1975), pp. 199–249. DOI: 10.1016/0020-0255(75)90036-5.