Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Minimalidade da Máquina de Adição Bilateral

Pouya Mehdipour[1], Rebeca M. S. Santos[2]
UFV, Viçosa, MG

Resumo. Neste trabalho, apresentaremos a construção de uma classe estendida de máquinas de adição e demonstraremos que tais construções representam exemplos de sistemas dinâmicos minimais.

Palavras-chave. Dinâmica Simbólica, Máquina de Adição, Minimalidade, Espaço *Zip*

1 Introdução

Sistemas dinâmicos minimais representam exemplos paradigmáticos de comportamentos dinâmicos não triviais, mas estruturalmente simples. Eles aparecem em contextos como a teoria das sequências de Toeplitz em dinâmica simbólica, e desempenham um papel fundamental na teoria ergódica, especialmente no estudo de sistemas unicamente ergódicos [4]. Além disso, a sua capacidade de gerar dinâmicas densas e recorrentes sem periodicidade é uma ferramenta poderosa para descrever e compreender fenômenos com padrões quase-periódicos. Por exemplo, eles ajudam na modelagem e codificação simbólica de sistemas físicos e matemáticos complexos como os quasicristais e azulejos de Penrose [2].

Em [3], os autores apresentam a estrutura de uma dinâmica simbólica estendida denominada Espaço *Zip*. Essa estrutura expande a dinâmica simbólica clássica (*Shifts* bilaterais) com o objetivo de estudar e codificar sistemas dinâmicos não inversíveis, especialmente aqueles com comportamentos caóticos. Esse tipo de estrutura simbólica baseia-se em dois conjuntos de símbolos e pode ser aplicado na modelagem de sistemas naturais que exibem transições entre diferentes fases.

Neste trabalho, estudamos as máquinas de adição α-ádicas unilaterais, que são exemplos de sistemas minimais infinitos [1], com o objetivo de estender e construir uma máquina de adição bilateral, assumindo algumas particularidades. Para isso, utilizamos conceitos da teoria do espaços *Zip*.

A construção de uma máquina de adição bilateral, conforme proposta neste trabalho, não apenas fornece um novo exemplo de dinâmica simbólica minimal, mas também estabelece as bases para um estudo futuro no qual pretende-se demonstrar que tal máquina bilateral caracteriza uma dinâmica em um espaço simbólico estendido que não é do tipo *Zip-Shift*. De fato, a existência de partições adequadas para sistemas não inversíveis pode levar à sua conjugação ou semiconjugação topológica com mapas *Zip-Shift*, possibilitando o estudo de dinâmicas complexas e caóticas por meio de representações simbólicas. No entanto, muitos sistemas dinâmicos não se enquadram na classe daqueles que podem ser modelados efetivamente por meio dos espaços *Zip-Shift*. Nesse contexto, a construção e o estudo de mapas que não são *Zip-Shift* tornam-se significativos.

Inicialmente, introduziremos a máquina de adição unilateral e algumas de suas propriedades. Em seguida, abordaremos os fundamentos necessários da teoria de espaços *Zip*. Por fim, definiremos a máquina de adição bilateral e provaremos sua minimalidade.

[1] pouya@ufv.br
[2] rebeca.marjorie@ufv.br

2 Máquina de Adição Unilateral

Nesta seção vamos introduzir o conceito de Máquina de Adição para o caso unilateral.

Definição 2.1. *Seja $\alpha^+ = (j_1, j_2, \dots)$ uma sequência de inteiros onde cada $j_i \geq 2$. Denotamos por Δ_{α^+} o conjunto de todas as sequências $(x_1, x_2, \dots)$ onde cada $x_i \in \{0, 1, \dots, j_i - 1\}$ para cada i. O conjunto Δ_{α^+} é chamado de **Máquina de Adição α^+-ádica**.*

Exemplo 2.1. *Seja $\alpha^+ = (2, 2, 2, \dots)$, então dada uma sequência $(x_1, x_2, \dots)$, cada $x_i \in \{0, 1\}$. Assim, $\Delta_{\alpha^+} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Definição 2.2. *Definimos a aplicação, $f_{\alpha^+} : \Delta_{\alpha^+} \to \Delta_{\alpha^+}$ dada por*

$$f_{\alpha^+}(x) = (x_1, x_2, \dots) + (1, 0, \dots)$$

*chamada **Aplicação da máquina de adição**.*

Proposição 2.1. *A aplicação da máquina de adição Δ_{α^+} é um homeomorfismo.*

Definição 2.3. *Um conjunto $A \subset X$ é dito minimal para $f : X \to X$ se*

1. *A é fechado e f-invariante;*
2. *Se $B \subset A$ é um subconjunto fechado e f-invariante, então $B = \emptyset$ ou $B = A$.*

*Nesse caso, $f_{|_A} : A \to A$ é chamado um **sistema dinâmico minimal**.*

Proposição 2.2. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Dizemos que X é um conjunto minimal para f se, e somente se, todos os pontos de X possuem órbita densa em X.*

A máquina de adição unilateral é um exemplo de um sistema dinâmico onde Δ_{α^+} é minimal. Tais sistemas desempenham um papel importante na construção de contraexemplos em teoria ergódica e sistemas dinâmicos.

Proposição 2.3. *O sistema dinâmico $(\Delta_{\alpha^+}, f_{\alpha^+})$ é minimal.*

3 Espaço *Zip*

Nesta seção vamos introduzir o conceito de um espaço *Zip*. Consideremos dois alfabetos finitos $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ e $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ com $k \leq n$ [3], [4].

Definição 3.1. *Dizemos que a aplicação $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ é um **mapa de transição** se τ for sobrejetora e não necessariamente invertível.*

Definição 3.2. *Seja $\Sigma_{\mathcal{S}}$ o espaço $\mathcal{S}$-completo. Definimos o espaço Zip denotado por $\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ onde cada $y \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ corresponde a um ponto $x \in \Sigma_{\mathcal{S}}$ de modo que*

$$y_i = \begin{cases} x_i \in \mathcal{S}, & se\ i \geq 0 \\ \tau(x_i), & se\ i < 0. \end{cases}$$

Exemplo 3.1. *Consideremos os alfabetos $\mathcal{Z} = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Dessa forma, podemos definir um mapa de transição $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ dado por*

$$\tau(0) = \tau(1) = a, \tau(2) = \tau(3) = b \ e\ \tau(4) = \tau(5) = c.$$

Assim, se tomarmos a sequência $(\dots, 5, 0, 3\,;\, 1, 4, 2, \dots)$ então uma sequência $y \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ tem a forma

$$y = (\dots, \tau(5), \tau(0), \tau(3)\,;\, 1, 4, 2, \dots) = (\dots, c, a, b\,;\, 1, 4, 2, \dots).$$

Definição 3.3. *Seja $\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ o espaço Zip. Definimos a métrica $\overline{d} : \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \times \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \to [0,1]$ dada por:*

$$\overline{d}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{M(x,y)}}, \ se\ x \neq y \\ 0, \ se\ x = y \end{cases}$$

onde $M(x,y) = \min\limits_{i\in\mathbb{Z}} |i|\,;\, x_i \neq y_i$.

A topologia métrica induzida pela métrica $\overline{d}$ é equivalente a topologia produto, assim, os conjuntos da forma $C_i^{s_i} = \{x \in \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}\,;\, x_i = s - i\}$, onde $s_i \in \mathcal{S}$ para $i \geq 0$ e $s_i \in \mathcal{Z}$ para $i < 0$, formam uma sub-base. Os elementos da base associada chamados de cilindros gerais, que terão formato $C_{i_1,\ldots,i_k}^{s_{i_1},\ldots,s_{i_k}} = C_{i_1}^{s_{i_1}} \cap \cdots \cap C_{i_k}^{s_{i_k}}$, com $s_{i_j} \in \mathcal{S}$ para $i_j \geq 0$ e $s_{i_j} \in \mathcal{Z}$ para $i_j < 0$ [3].

Definição 3.4. *Seja $(\Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}, \overline{d})$ e $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{Z}$ um mapa de transição. A* ***aplicação Zip-Shift*** *$\sigma_\tau : \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}} \to \Sigma_{\mathcal{Z},\mathcal{S}}$ dada por:*

$$\sigma_\tau(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, \tau(x_0)\,;\, x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

O par $(\Sigma_{Z,S}, \sigma_\tau)$ chamamos de um ***espaço zip-shift****, onde $\Sigma_{Z,S}$ é o espaço $(\mathcal{Z},\mathcal{S})$-completo.*

Exemplo 3.2. *Consideremos $\mathcal{Z} = \mathcal{S} = \{0,1\}$ onde $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ é a aplicação identidade. Então o mapa zip-shift coincide com a função shift bilateral já que*

$$\sigma_\tau(\ldots, x_{-2}, x_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \tau(x_0)\,;\, x_1, x_2, \ldots) = \sigma(\ldots, x_{-2}, x_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots).$$

Exemplo 3.3. *Consideremos as hipóteses do exemplo 3.1. Dessa forma,*

$$\sigma_\tau(\ldots, c, a, b\,;\, 1, 4, 2, \ldots) = (\ldots, c, a, b, \tau(1)\,;\, 4, 2, \ldots) = (\ldots, c, a, b, a\,;\, 4, 2, \ldots)$$

4 A Máquina de Adição Bilateral

Nesta seção vamos apresentar o conceito de Máquina de Adição Bilateral.

Definição 4.1. *Seja $\alpha = (\ldots, 2, 2\,;\, j, j, \ldots)$ com $j \geq 2$ e os alfabetos finitos $\mathcal{Z} = \{a_0, b_1\}$ e $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, j-1\}$ com $j \geq 2$. Definimos o conjunto Δ_α chamado* ***Máquina de Adição Bilateral α-ádica*** *sendo um espaço Zip associado aos conjuntos $\mathcal{Z}$ e $\mathcal{S}$.*

Pela definição do espaço *Zip*, sabemos que a máquina de adição bilateral está associada à um mapa de transição arbitrário. A partir daqui vamos fixar o mapa de transição

$$\tau(x_i) = \begin{cases} a_0, \ x_i < j-1 \\ b_1, \ x_i = j-1. \end{cases} \tag{1}$$

Exemplo 4.1. *Consideremos $\alpha = (\ldots, 2, 2\,;\, 4, 4, \ldots)$, então um $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Delta_\alpha$ tem a forma $(x_n) = (\ldots, b_1, a_0, b_1; 3, 0, 2, \ldots)$.*

Exemplo 4.2. *Consideremos $\alpha = (\ldots, 2, 2\,;\, 2, 2, \ldots)$, isto é, $\mathcal{S} = \mathcal{Z}$. Notemos que, as sequências em Δ_α correspondem as sequências no espaço $\mathcal{S}$-completo $\Sigma_{\mathcal{S}}$, isto pois o mapa de transição τ coincide com a função identidade.*

Definição 4.2. *Seja $f_\alpha : \Delta_\alpha \to \Delta_\alpha$ dada por*

$$f_\alpha(x) = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots) + (\ldots, a_0, a_0\,;\, 1, 0, \ldots) \tag{2}$$

chamada ***Aplicação da máquina de adição bilateral****.*

Observação 4.1. *Como nosso objetivo é generalizar a máquina de adição unilateral, do ponto de vista binário,* $a_0 = 0$ *e* $b_1 = 1$. *Assim,* $a_0 + 1 = b_1$ *e* $b_1 + 1 = a_0$.

Exemplo 4.3. *Consideremos* $\alpha = (\ldots, 2, 2\,;\, 3, 3, \ldots)$ *e* $x = (\ldots, b_1, b_1, a_0\,;\, 2, 1, 1, \ldots) \in \Delta_\alpha$, *então* $f_\alpha(x) = (\ldots, b_1, b_1, b_1\,;\, 0, 2, 1, \ldots)$.

Proposição 4.1. *A aplicação* f_α *é um homeomorfismo.*

Assim como no caso unilateral, esta aplicação também induz uma operação entre os elementos deste conjunto, ou seja:

Definição 4.3. *Dadas as sequências* $x, y, z \in \Delta_\alpha$. *A soma* $x + y = z$ *é dada por*

- $i \geq 0$:
  As coordenadas resultantes são: $z_0 = (x_0 + y_0)\, mod\, j$, $z_1 = (x_1 + y_1 + t_1)\, mod\, j$ *onde*

$$\begin{cases} t_1 = 0, \;\; se\; x_0 + y_0 < j \\ t_1 = 1, \;\; se\; x_0 + y_0 \geq j. \end{cases} \tag{3}$$

  $z_2 = (x_2 + y_2 + t_2)\, mod\, j$ *onde*

$$\begin{cases} t_2 = 0, \;\; se\; x_1 + y_1 + t_1 < j \\ t_2 = 1, \;\; se\; x_1 + y_1 + t_1 \geq j, \end{cases} \tag{4}$$

  Para obter os próximos termos, basta prosseguirmos com este raciocínio. Neste caso, a soma é feita como na máquina de adição unilateral.

- $i < 0$: *As coordenadas resultantes são:* $z_{-1} = (x_{-1} + y_{-1} + s_1)\, mod\, 2$ *com* $s_1 = \tau(x_0 + y_0\; mod\, j)$, $z_{-2} = (x_{-2} + y_{-2} + s_2)\, mod\, 2$ *onde*

$$\begin{cases} s_2 = 0, \;\; se\; x_{-1} + y_{-1} + s_1 < 2 \\ s_2 = 1, \;\; se\; x_{-1} + y_{-1} + s_1 \geq 2. \end{cases} \tag{5}$$

  Para obter os termos anteriores, basta prosseguirmos com este raciocínio.

Lema 4.1. *Se* x *pertence a um cilindro de tamanho* $2n + 1$, *então existe um cilindro de tamanho* $2n + 2$ *tal que* $f_\alpha(x)$ *pertence a este cilindro.*

Lema 4.2. *Dada uma sequência* $y \in \Delta_\alpha$. *Se* $y_i \in \mathcal{S}$ *para* $i \geq 0$ *e* $y_i \in \mathcal{Z}$ *para* $i < 0$, *então* $\Delta_\alpha = \bigcup C^{y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n}_{-n, \ldots, 0, \ldots, n}$.

Teorema 4.1. *O sistema dinâmico* $(\Delta_\alpha, f_\alpha)$ *é minimal.*

Demonstração. Aqui vamos apresentar a ideia da prova. Para facilitar a compreensão, restringiremos a demonstração para $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ já que para os outros casos o raciocínio é análogo. Para evitar sobrecarregar as notações, omitiremos os carregamentos que acompanham a função da máquina de adição bilateral.

Queremos mostrar que Δ_α é um conjunto f_α-minimal, como f_α é um homeomorfismo, pela Proposição 2.2, basta mostrarmos:

$$\forall x \in \Delta_\alpha,\, \mathcal{O}^+_{f_\alpha} \cap C^{y_{-k}, \ldots, y_{-1}, x_0, \ldots, x_k}_{-k, \ldots, -1, 0, \ldots, k} \neq \emptyset \tag{6}$$

onde $y_i \in \mathcal{Z}$ para $i < 0$ e $x_i \in \mathcal{S}$ para $i \geq 0$. Para isto, provemos usando o método de indução matemática, com efeito:

1. Cilindros de tamanho 1:
Pelo lema 4.2, sabemos que $\Delta_\alpha = C_{-1}^{a_0} \cup C_{-1}^{b_1}$. Aqui fixamos a coordenada y_{-1} e variamos os elementos que podem ser assumidos nesta posição. De modo geral, se fixarmos x_i para $i \geq 0$ o raciocínio é análogo ao caso unilateral. Dessa forma, dado $x \in \Delta_\alpha$ tal que

$$\begin{aligned} x \in C_{-1}^{a_0} \quad &\Rightarrow \quad x = (\dots, y_{-2}, a_0\,;\, x_0, x_1, \dots) && (7)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2}, a_0\,;\, x_0, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0\,;\, 1, 0, \dots) && (8)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, s_1\,;\, x_0 + 1, x_1 + t_1, \dots) && (9)\end{aligned}$$

Temos então dois casos a serem analisados:

- Se $x_0 + 1 < j$, então não há carregamentos para o passaod e não há carregamentos para o futuro. Logo, $f_\alpha(x) \in C_{-1}^{a_0}$.
- Se $x_0+1 \geq j$, então $t_1 = s_1 = 1$, logo, $f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2}+s_2, 1\,;\, x_0+1, x_1+1, \dots) \in C_{-1}^{b_1}$.

Portanto, $\mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap C_{-1}^{y_i} \neq \emptyset$ para $y_i \in \{a_0, b_1\}$.

2. Cilindros de tamanho 2:
Pelo lema 4.2, temos:

$$\Delta_\alpha = C_{-1,0}^{a_0,0} \cup C_{-1,0}^{a_0,1} \cup C_{-1,0}^{b_1,0} \cup C_{-1,0}^{b_1,1} \cup C_{-1,0}^{a_0,2} \cup C_{-1,0}^{b_1,2}. \tag{10}$$

Agora, suponhamos que $x \in C_{-1,0}^{a_0,0}$. Logo,

$$\begin{aligned} x \in C_{-1,0}^{a_0,0} \quad &\Rightarrow \quad x = (\dots, y_{-2}, a_0\,;\, 0, x_1, \dots) && (11)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2}, a_0\,;\, 0, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0\,;\, 1, 0, \dots) && (12)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, a_0\,;\, 1, x_1 + t_1, \dots) && (13)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{a_0,1} && (14)\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) \in C_{-1,0}^{a_0,1} \quad &\Rightarrow \quad f_\alpha(x) = (\dots, y_2, a_0\,;\, 1, x_1, \dots) && (15)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha^2(x) = (\dots, y_2, a_0\,;\, 1, x_1, \dots) + (\dots, a_0, a_0\,;\, 1, 0, \dots) && (16)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha^2(x) = (\dots, y_{-2} + s_2, a_0\,;\, 2, x_1 + t_1, \dots) && (17)\\ &\Rightarrow \quad f_\alpha^2(x) \in C_{-1,0}^{a_0,2}. && (18)\end{aligned}$$

Por recursão, podemos observar que as iteradas de x pela f_α intercecta todos os cilindros de tamanho 2 que descrevem o espaço. Além disso, a iterada $f_\alpha^6(x)$ retorna ao cilindro original $C_{-1,0}^{a_0,0}$.

3. Cilindos de tamanho $2k+1$:
Suponhamos então que a hipótese é válida para cilindros de tamanho $2k+1$, isto é

$$\forall x \in \Delta_\alpha,\, \mathcal{O}_{f_\alpha}^+(x) \cap C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} \neq \emptyset. \tag{19}$$

Como a interseção acima é não vazia, pelo lema 4.1 deve existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_\alpha^m(x) \in C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k}$. Nosso objetivo é exibir um $n \in \mathbb{N}$ tal que $(f_\alpha^m)^n(x)$ pertence a algum cilindro de tamanho $2k+2$. Sabemos que

$$C_{-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} = C_{-k-1,-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{a_0,y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k} \cup C_{-k-1,-k,\dots,-1,0,\dots,k}^{b_1,y_{-k},\dots,y_{-1},x_0,\dots,x_k}. \tag{20}$$

Observemos que também é possível descrever o espaço Δ_α tomando cilindros de tamanho $2k+2$ com coordenada $k+1$ possuindo elementos em $\mathcal{S}$, e neste caso, a demonstração coincide com o resultado análogo da máquina de adição unilateral.

Suponhamos que $f_\alpha^m(x) \in C^{a_0,y_{-k},\ldots,y_{-1},x_0,\ldots,x_k}_{-k-1,-k,\ldots,-1,0,\ldots,k}$, daí

$$\begin{aligned} f_\alpha^m(x) &= (\ldots, a_0, y_{-k}, \ldots, y_{-2}, y_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots) && (21)\\ &\Rightarrow f_\alpha(f_\alpha^m(x)) = (\ldots, a_0, y_{-k}, \ldots, y_{-2}, y_{-1}\,;\, x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots) + (\ldots, a_0, a_0\,;\, 1, 0, \ldots) && (22)\\ &\Rightarrow f_\alpha(f_\alpha^m(x)) = (\ldots, s_{k-1}, y_{-k}+s_k, \ldots, y_{-2}+s_2, y_{-1}+s_1\,;\, x_0+1, x_1+t_1, \ldots) && (23)\end{aligned}$$

Omitindo os carrementos obtidos a cada iteração da aplicação f_α, obtemos

$$f_\alpha^2(f_\alpha^m(x)) = (\ldots, s_{k-1}+\ldots, y_{-k}+\ldots, \ldots, y_{-1}+s_1+\ldots\,;\, x_0+2, x_1+t_1+\ldots, x_k+\ldots, \ldots) \tag{24}$$

e

$$f_\alpha^3(f_\alpha^m(x)) = (\ldots, s_{k-1}+\ldots, y_{-k}+\ldots, \ldots, 1+y_{-1}+\ldots\,;\, x_0, 1+x_1+\ldots, x_k+\ldots, \ldots) \tag{25}$$

Assim, para carregar 1 na coordenada -1 da sequência, basta iterarmos 3-vezes. Da mesma forma, para carregar 1 na coordenada -2 da sequência, basta iterarmos $(3\cdot 2)$-vezes.

$$f_\alpha^6(f_\alpha^m(x)) = (\ldots, s_{k-1}+\ldots, \ldots, 1+y_{-2}+\ldots, y_{-1}+\ldots\,;\, x_0\ldots, 2+x_1+\ldots, 1+x_2+\ldots, \ldots) \tag{26}$$

Seguindo o processo de forma recorrente, para obtermos b_1 na coordenada $-k-1$, basta calcular

$$(f_\alpha^m)^{3\cdot 2^{(-k-1)}}(x). \tag{27}$$

Portanto, tomando todos os carregamentos iguais a zero,

$$(f_\alpha^m)^{3\cdot 2^{(-k-1)}}(x) \in C^{b_1,y_{-k},\ldots,y_{-1},x_0,\ldots,x_k}_{-k-1,-k,\ldots,-1,0,\ldots,k} \tag{28}$$

e a interseção com a órbita de $f_\alpha^m(x)$ é não vazia.

De modo geral, quando consideramos $\alpha = (\ldots, 2, 2\,;\, j, j, \ldots)$ o raciocínio é semelhante, com a observação de que há uma quantidade maior de cilindros e carregamentos com $n = j \cdot 2^k$. Além disso, se descrevermos o espaço Δ_α por cilindros com entrada até $k+1$, então para carregar 1 na coordenada $k+1$ da sequência, $n = j^k$. Por fim, notemos que, é possível carregamos 1 na coordenada $-k-1$ e $k+1$ quando $j \cdot 2^k = j^k$. $\square$

4.1 Trabalhos Futuros

Como trabalho futuro em continuidade a estes estudos, buscaremos apresentar uma caracterização para as Máquinas de Adição Bilaterais em termos de conjugação ou semiconjugação topológica. Além disso, procuraremos encontrar condições relacionadas à existência de órbitas recorrentes para garantir tal conjugação topológica, seguindo as direções do artigo [1].

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer à CAPES e FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Referências

[1] L. Block e J. Keesling. "A characterization of adding machine maps". Em: **Topology and its Applications** 2 (2004), pp. 151–161. DOI: 10.1016/j.topol.2003.07.006.

[2] M. V. Jarić. **Introduction to the Mathematics of Quasicrystals**. Aperiodicity and Order. San Diego: Academic Press, 1989. ISBN: 978-0120406029.

[3] S. Lamei e P. Mehdipour. “Zip Shift Space”. Em: **arXiv preprint arXiv:2502.11272** (2025). URL: https://arxiv.org/abs/2502.11272.

[4] D. Lind e B. Marcus. **An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding**. Springer Briefs in Mathematics. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 9780521559003.

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0306