Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Explorando Duais de Espinores e Estruturas Algébricas Adjacentes

Rogério T. Cavalcanti[1]
IME | UERJ, Rio de janeiro, RJ e DFI | UNESP, Guaratinguetá, SP

Resumo. Após uma exposição concisa das álgebras de Clifford e a definição de espinores como ideais minimais dessas álgebras, é revelada a estrutura algébrica de duais gerais potencialmente aplicáveis à física de altas energias e algumas de suas propriedades. Aplicações entre esses duais são introduzidas, bem como condições sob as quais conjuntos dessas aplicações formam um grupo. Além disso, são exploradas as definição de aplicações duais como elementos de anéis de grupo, uma estrutura bastante raras nas aplicações da álgebra à física.

Palavras-chave. Espinores, Álgebras de Clifford, Teoria de Duais, Teoria de Dirac, Anéis de Grupo.

1 Introdução

Espinores desempenham um papel fundamental na física de partículas fermiônicas desde a formulação do spin por Pauli [17] e a teoria de Dirac para o elétron [10]. O conceito matemático, contudo, surge com o trabalho clássico de Elie Cartan [7]. Desde então, a teoria dos espinores passou por um enorme desenvolvimento, e tanto os aspectos matemáticos quanto os físicos adquiriram grande relevância na física de altas energias [18] e geometria [14]. Uma característica central dos espinores na física é que um férmion isolado não pode ser detectado [21]. Espinores, como elementos do espaço que carrega representação irredutível de $SL(2,\mathbb{C})$, só geram quantidades físicas quando compostos com o dual espinorial. Tradicionalmente, usava-se apenas o dual de Dirac, pois ele garante relações de ortonormalidade e localidade adequadas para campos fermiônicos. Recentemente, novos duals surgiram em teorias quânticas candidatas a descrever a matéria escura [1, 4, 5]. Em particular os espinores Elko[2] [4], cuja característica relevante para a presente análise é que, desde a formulação inicial, exigem uma nova formulação de espinor dual para que seja fisicamente consistente [4]. Essa necessidade culminou no desenvolvimento de uma teoria para o dual espinorial [2, 3, 19, 20], baseada em um conjunto criterioso de requisitos físicos e formais.

Formulações gerais para duais de espinores podem oferecer uma base sólida para a proposição de campos quânticos além do Modelo Padrão. Ao estender a estrutura algébrica dos duais, como proposto neste trabalho, torna-se possível acomodar tipos de espinores que não são contemplados pelas formulações tradicionais, incluindo aqueles relevantes para candidatos à matéria escura ou interações não convencionais. Esses duais generalizados permitem a construção de Lagrangianas e propagadores consistentes para campos fermiônicos não padrão, oferecendo novas ferramentas teóricas para a exploração de extensões do arcabouço atual da física de partículas.

Neste artigo, nosso objetivo é compreender, seguindo a inspeção criteriosa da definição geral da álgebra de Clifford para duais espinoriais introduzida na Ref. [20] e revisada na Seção 2, as

[1]rogerio.cavalcanti@ime.uerj.br

[2]Elko é um acrônimo do termo alemão "Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators", que significa "autoespinor do operador de conjugação de carga".

conexões entre diferentes duais espinoriais permitidos, os mapeamentos que os associam e revelar algumas estruturas algébricas ocultas por trás desses mapeamentos. Na Seção 3, investigamos adequadamente as estruturas algébricas associadas aos mapeamentos previamente definidos, incluindo estruturas de grupo e anéis de grupo definidas sobre o conjunto de mapeamentos entre diferentes duais [8]. A Seção 4 é reservada para as considerações finais. Deixamos para o Apêndice a forma matricial explícita dos operadores (elementos do grupo) estudados na Seção 3.

2 Formulação Algébrica e Espinores Duais Gerais

É um fato bem conhecido que os aspectos formais de espinores são melhor entendidos por meio de estudos detalhados desses objetos definidos sobre a estrutura das álgebras de Clifford [11, 12], cuja definição é dada a seguir. Dado um espaço vetorial real equipado com uma forma quadrática simétrica g de assinatura (p, q), denotado por $\mathbb{R}^{p,q}$, sua álgebra de Clifford associada é definida da seguinte forma: *A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, associada ao espaço quadrático $\mathbb{R}^{p,q}$, é a álgebra associativa unital tal que*

(i) *A aplicação de Clifford $\gamma : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathcal{C}\ell_{p,q}$ é linear e satisfaz*[3]

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = 2g(v, u), \qquad \forall\, v, u \in \mathbb{R}^{p,q};$$

(ii) *Se $(\mathcal{Y}, \gamma')$ é outra álgebra associativa unital e uma aplicação $\gamma' : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathcal{Y}$ satisfaz $\gamma'(v)\gamma'(u) + \gamma'(u)\gamma'(v) = 2g(v, u)$, então existe um homomorfismo único $\phi : \mathcal{C}\ell_{p,q} \to \mathcal{Y}$ tal que $\gamma' = \phi \circ \gamma$.*

Sob a estrutura das álgebras de Clifford, além da definição clássica de espinores como elementos do espaço que carrega a representação irredutível do grupo Spin (o grupo de Lorentz no caso do espaço de Minkowski), existe também a importante, embora menos popular, definição algébrica [9]. Espinores algébricos são ideais minimais à esquerda construídos a partir de idempotentes primitivos da álgebra base. Em geral, dada a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ e um idempotente primitivo f, os ideais mínimos à esquerda têm a forma $\mathcal{C}\ell_{p,q}f$. Além disso, um anel de divisão $\mathbb{K}$, isomorfo a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ (reais, complexos e quatérnions), é obtido dependendo da dimensão e assinatura do espaço, por meio de $f\mathcal{C}\ell_{p,q}f$. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \cdot \ : \mathcal{C}\ell_{p,q}f \times \mathbb{K} & \to & \mathcal{C}\ell_{p,q}f \\ (\psi, a) & \mapsto & \psi \cdot a \equiv \psi a, \end{array} \tag{1}$$

define uma estrutura de módulo à direita sobre $\mathbb{K}$ no espaço $\mathcal{C}\ell_{p,q}f$. Equipado com essa estrutura, $\mathcal{C}\ell_{p,q}f$ é chamado de *espaço de espinores algébricos* de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, denotado por $\mathbb{S}_{p,q}$. Analogamente, ideais minimais à direita podem ser construídos a partir de $f\mathcal{C}\ell_{p,q}$. O anel de divisão e a estrutura de módulo sobre $\mathbb{K}$ são análogos para esses ideais. O espaço de espinores algébricos dos ideais à direita da álgebra $\mathbb{C}\ell_{p,q}$ é denotado por $\mathbb{S}^\star_{p,q}$. A ação de um elemento de $\mathbb{S}^\star_{p,q}$ sobre $\mathbb{S}_{p,q}$ define uma aplicação linear cuja imagem é o anel de divisão $\mathbb{K}$. Além disso, $\mathbb{S}^\star_{p,q}$ é isomorfo ao espaço das aplicações lineares $\mathcal{L}(\mathbb{S}_{p,q}, \mathbb{K})$, motivando a introdução de produtos internos no espaço de espinores algébricos. Dessa forma, um produto interno $\beta : \mathbb{S}_{p,q} \times \mathbb{S}_{p,q} \to \mathbb{K}$ é definido associando um espinor arbitrário $\psi \in \mathbb{S}_{p,q}$ ao seu correspondente $\psi^\star \in \mathbb{S}^\star_{p,q}$, chamado de adjunto em relação ao produto interno β, tal que $\beta(\psi, \phi) = \psi^\star\phi \in \mathbb{K}$.

Ideais à direita podem ser transformados em ideais à esquerda, e vice-versa, por involuções da álgebra. No entanto, os idempotentes não são sempre preservados. Em outras palavras, denotando uma involução genérica por α, tem-se que $\alpha(\mathcal{C}\ell_{p,q}f) = \alpha(f)\mathcal{C}\ell_{p,q}$, mas, em geral, $\alpha(f) \neq f$.

[3] Em geral, por simplicidade, a aplicação de Clifford é omitida e o produto de Clifford é denotado por justaposição.

Entretanto, sempre existe um elemento $h \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ tal que $\alpha(f) = h^{-1}fh$ e $\alpha(h) = h$ [6, 12]. Isso permite definir $\psi^\star = \alpha(h\psi) = h\alpha(\psi)$. Assim, um produto interno pode ser obtido por

$$\beta(\psi, \phi) = h\alpha(\psi)\phi f \in f\mathcal{C}\ell_{p,q}f \simeq \mathbb{K}. \tag{2}$$

Onde α é a chamada de involução adjunta do produto interno β.

Ao lidar com álgebras de Clifford complexificadas $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}\ell_{p,q}$, a composição da conjugação complexa com as outras involuções algébricas altera a involução adjunta dos produtos internos. A situação relevante para nós é a que a involução adjunta é equivalente à conjugação hermitiana na representação matricial da álgebra. Para isso, é suficiente que $\alpha^*(a) = h^{-1}a^\dagger h$ e $h^\dagger = h$, para qualquer $a \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}$ (em particular para $a \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{S}_{p,q}$) e $h \in \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}$ [6, 12]. O espinor adjunto (ou dual) $\psi^\star \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{S}^\star_{p,q}$ é então dado por

$$\psi^\star = h\alpha^*(\psi) = \psi^\dagger h = [h\psi]^\dagger. \tag{3}$$

Definindo $h = \eta\Delta$, com $\eta^\dagger = \eta$, segue que Δ deve satisfazer a condição

$$\Delta^\dagger \eta = \eta\Delta. \tag{4}$$

Isso impõe uma vínculos importantes ao operador Δ. O caso particular do dual de Dirac, com $\Delta = \mathbb{I}$, obviamente satisfaz (4). O dual alternativo de Dirac encontrado na Ref. [19], também obedece à Eq. (4). Uma caracterização adicional do operador Δ pode ser encontrada tomando uma matriz complexa geral $\Delta = [a_{ij}]$ e impondo a Eq. (4), o que resulta em

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a^*_{14} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a^*_{11} & a^*_{21} \\ a^*_{32} & a_{42} & a^*_{12} & a^*_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \;\; a_{13}, a_{31}, a_{24}, a_{42} \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

A matriz acima possui uma estrutura clara de matriz em blocos, que, como esperado, é compatível com aquela encontrada em [3] e [19]. Ela pode ser representada como

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A^\dagger \end{bmatrix}, \text{ com } B^\dagger = B \;\text{ e }\; C^\dagger = C. \tag{6}$$

Pode-se mostrar que o operador Δ não afeta a invariância de Lorentz do produto interno, sendo essa tarefa cumprida por $\eta = \gamma^0$ [20], evidenciando Δ como o único responsável pelos graus de liberdade de um dual covariante de Lorentz geral.

3 Mapeamentos Duais e Estruturas Algébricas

Poderíamos agora explorar construção dual da Sessão anterior, ou, alternativamente, a partir do dual proposto em [3], definir um mapeamento dual que preserve toda a generalidade de Δ. Esse será o caminho seguido nessa Sessão. Denotaremos esse mapeamento por Ω. A principal vantagem dessa abordagem é que, quando definido dessa maneira, algumas estruturas algébricas inesperadas do conjunto de mapeamentos Ω são reveladas. A relação entre Δ e Ω é obtida definindo-se um dual arbitrário do espinor, $\psi^\star$, de tal forma que:

$$\psi^\star = [\Omega\gamma^0\Xi\psi]^\dagger = \psi^\dagger\gamma^0\Xi\Omega. \tag{7}$$

Comparando as Eqs. (3) e (7), obtemos $\gamma^0\Delta = \Omega\gamma^0\Xi$, ou, equivalentemente, $\Delta = \gamma^0\Omega\gamma^0\Xi$ e $\Omega = \gamma^0\Delta\Xi\gamma^0$. Usando a equação (4) segue a restrição fundamental para o mapeamento Ω:

$$\Omega^\dagger = \gamma^0\Xi^\dagger\Delta^\dagger\gamma^0 = \Xi\gamma^0\gamma^0\Delta = \Xi\Delta = \Xi\gamma^0\Omega\gamma^0\Xi. \tag{8}$$

Agora estamos aptos a investigar a estrutura algébrica associada aos mapeamentos Ω. A primeira questão é a possibilidade de que um conjunto de mapeamentos Ω forme um grupo. Para isso, um subconjunto de $GL(4,\mathbb{C})$, que denotaremos genericamente por G_Ω, deve satisfazer as propriedades de associatividade, conter a unidade, ser invertível e satisfazer a propriedade de fechamento.

A associatividade decorre diretamente da álgebra matricial. A unidade corresponde ao caso $\Delta = \Xi$. A invertibilidade é garantida ao mostrar que, para um Ω invertível que obedeça à Eq. (8), vale a identidade $\left(\Omega^{-1}\right)^\dagger = \Xi\gamma^0\Omega^{-1}\gamma^0\Xi$. De fato, como $\Omega^\dagger = \Xi\gamma^0\Omega\gamma^0\Xi$, obtemos $\left(\Omega^\dagger\right)^{-1} = \Xi\gamma^0\Omega^{-1}\gamma^0\Xi$. Portanto, o resultado segue de $\left(\Omega^{-1}\right)^\dagger = \left(\Omega^\dagger\right)^{-1}$. A propriedade de fechamento é menos imediata e impõe uma restrição nos possíveis candidatos a G_Ω. De fato, dados Ω_1 e Ω_2, a Eq. (8) exige que $(\Omega_1\Omega_2)^\dagger = \Xi\gamma^0\Omega_1\Omega_2\gamma^0\Xi$. Por outro lado,

$$(\Omega_1\Omega_2)^\dagger = \Omega_2^\dagger\Omega_1^\dagger = \Xi\gamma^0\Omega_2\gamma^0\Xi\Xi\gamma^0\Omega_1\gamma^0\Xi = \Xi\gamma^0\Omega_2\Omega_1\gamma^0\Xi. \tag{9}$$

Comparando as duas equações, concluímos que $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_2\Omega_1$, ou seja, G_Ω deve ser um subgrupo abeliano de $GL(4,\mathbb{C})$. A partir disso obtemos a restrição correspondente para Δ:

$$\Delta_1\Xi\Delta_2\Xi = \Delta_2\Xi\Delta_1\Xi. \tag{10}$$

Como $\Xi^2 = \mathbb{I}$, isso implica que $\Delta_1\Xi\Delta_2 = \Delta_2\Xi\Delta_1$. Uma forma simples para a descrição mais geral de G_Ω não foi encontrada, apenas casos particulares que ilustram a estrutura algébrica adjacente, como explicitado nas subseções a seguir.

3.1 Grupos G_Ω

Uma vez estabelecidas as condições para que G_Ω seja um grupo, podemos agora explorar alguns casos particulares explicitamente. A forma matricial dos elementos abaixo, bem como algumas de suas propriedades úteis, são apresentadas no Apêndice.

$$\mathcal{G}(\phi) = \mathcal{G} \equiv \frac{m}{2E}\{\gamma^0,\Xi\} = \frac{m}{2E}\left(\gamma^0\Xi + \Xi\gamma^0\right), \quad \mathcal{F}(\theta,\phi) = \mathcal{F} \equiv \frac{m}{2p}[\gamma^0,\Xi] = \frac{m}{2p}\left(\gamma^0\Xi - \Xi\gamma^0\right)$$
$$\mathcal{F}(\theta,\phi)\mathcal{G}(\phi) = \mathcal{F}\mathcal{G} = \frac{m^2}{4Ep}[\Xi^\dagger,\Xi], \quad \Xi^\dagger(p^\mu) = \Xi^\dagger = \gamma^0\Xi\gamma^0, \quad \mathcal{G}\Xi^\dagger(p^\mu) = \frac{m}{2E}\left(\Xi^\dagger\Xi + \mathbb{I}\right)\gamma^0,$$
$$\mathcal{H}(p^\mu) \equiv m^2\Xi\Xi^\dagger, \quad \mathcal{H}^{-1}(p^\mu) = m^{-2}\Xi^\dagger\Xi = m^{-4}\gamma^0\mathcal{H}\gamma^0.$$

Três estruturas de grupo são identificadas ao observar as propriedades acima. Duas delas são diretamente dadas por $G_\mathcal{F} \equiv \{\mathbb{I},\mathcal{G},\mathcal{F},\mathcal{F}\mathcal{G}\}$ e $G_{\Xi^\dagger} \equiv \{\mathbb{I},\mathcal{G},\Xi^\dagger,\mathcal{G}\Xi^\dagger\}$, cujas tabelas de Cayley são apresentadas abaixo. Esses grupos são isomorfos ao grupo clássico de Klein K_4. Apesar do isomorfismo, $G_\mathcal{F}$ e G_Ξ são topologicamente não equivalentes, pois os parâmetros de $G_\mathcal{F}$ são todos compactos. O grupo restante, denotada por $G_\mathcal{H}$, não é de ordem finita como os anteriores. Ele é gerada por $\{\mathbb{I},\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{H}^{-1}\}$ e tem $G_\mathcal{F}$ como um subgrupo.

$G_\mathcal{F}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}\mathcal{G}$
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}\mathcal{G}$
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{F}\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$
$\mathcal{F}\mathcal{G}$	$\mathcal{F}\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$

and

$G_{\Xi^\dagger}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$	$\Xi^\dagger$	$\Xi^\dagger\mathcal{G}$
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$	$\Xi^\dagger$	$\Xi^\dagger\mathcal{G}$
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$	$\Xi^\dagger\mathcal{G}$	$\Xi^\dagger$
$\Xi^\dagger$	$\Xi^\dagger$	$\Xi^\dagger\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$	$\mathcal{G}$
$\Xi^\dagger\mathcal{G}$	$\Xi^\dagger\mathcal{G}$	$\Xi^\dagger$	$\mathcal{G}$	$\mathbb{I}$

Tabela 1: Cayley tables for $G_\mathcal{F} \equiv \{\mathbb{I},\mathcal{G},\mathcal{F},\mathcal{F}\mathcal{G}\}$ (left panel) and $G_{\Xi^\dagger} \equiv \{\mathbb{I},\mathcal{G},\Xi^\dagger,\mathcal{G}\Xi^\dagger\}$ (right panel).

DOI: 10.5540/03.2026.012.01.0285

3.2 Anéis de Grupo $\mathbb{R}G_\Omega$

A linearidade da Eq. (8) garante que combinações de mapeamentos Ω também são mapeamentos Ω. Isso permite a definição de uma estrutura mais ampla, a saber, a de anéis de de grupo [13, 15, 16]. A Eq. (8) também restringe os escalares da combinação linear a pertencerem a $\mathbb{R}$. Assim, um elemento μ do anel de grupo $\mathbb{R}G_\Omega$ é representado na forma

$$\mu = \sum_{\omega \,\in\, G_\Omega} a_\omega \omega, \quad a_\omega \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Alguns anéis de grupo $\mathbb{R}G_\Omega$ particulares são apresentados abaixo. Note que o determinante fornece as condições sobre os coeficientes reais para que Ω seja invertível:

$$G_\Omega = G_{\Xi^\dagger} : \begin{cases} \Omega & = a\mathbb{I} + b\Xi^\dagger + c\mathcal{G} + d\Xi^\dagger\mathcal{G}, \\ \Delta & = b\mathbb{I} + a\Xi + d\mathcal{G} + c\Xi\mathcal{G}, \\ \det[\Omega] & = (a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b+c+d). \end{cases} \tag{12}$$

$$G_\Omega = G_{\mathcal{F}} : \begin{cases} \Omega & = a\mathbb{I} + b\mathcal{F} + c\mathcal{G} + d\mathcal{F}\mathcal{G}, \\ \Delta & = (a\mathbb{I} - b\mathcal{F} + c\mathcal{G} - d\mathcal{F}\mathcal{G})\Xi, \\ \det[\Omega] & = (a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b+c+d). \end{cases} \tag{13}$$

$$G_\Omega = G_{\mathcal{H}} : \begin{cases} \Omega & = a\mathbb{I} + b\mathcal{F} + c\mathcal{G} + d\mathcal{F}\mathcal{G} + h_1\mathcal{H} + h_2\mathcal{H}^2 + \cdots + \mathcal{F}(f_1\mathcal{H} + f_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + \\ & +\mathcal{G}(g_1\mathcal{H} + g_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + \mathcal{F}\mathcal{G}(fg_1\mathcal{H} + fg_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + h_{-1}\mathcal{H}^{-1} + h_{-2}\mathcal{H}^{-2} + \cdots, \\ \Delta & = \Xi[a\mathbb{I} + b\mathcal{F} + c\mathcal{G} + d\mathcal{F}\mathcal{G} + h_1\mathcal{H} + h_2\mathcal{H}^2 + \cdots + \mathcal{F}(f_1\mathcal{H} + f_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + \\ & +\mathcal{G}(g_1\mathcal{H} + g_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + \mathcal{F}\mathcal{G}(fg_1\mathcal{H} + fg_2\mathcal{H}^2 + \cdots) + h_{-1}\mathcal{H}^{-1} + h_{-2}\mathcal{H}^{-2} + \cdots]. \end{cases}$$

A possibilidade de mapeamentos Ω como elementos de anéis de grupo aumenta consideravelmente a variedade de duais, mesmo para o conjunto bastante restrito de mapeamentos Ω explicitamente introduzido aqui. Tal possibilidade merece uma atenção cuidadosa em investigações futuras.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos a estrutura algébrica de duais de espinores em álgebras de Clifford, estabelecendo as condições para que conjuntos de mapeamentos entre esses duais formem um grupo. Além disso, introduzimos a formulação desses mapeamentos dentro da estrutura de anéis de grupo, apresentando casos particulares explicitamente. Até onde é de nosso conhecimento, esta é a primeira aplicação de anéis de grupo em teorias físicas, o que abre novas possibilidades para a análise de simetrias e transformações em espaços espinoriais. Esses resultados sugerem caminhos promissores para investigações futuras, incluindo a aplicação dessas estruturas a teorias quânticas de campos e possíveis conexões com extensões do Modelo Padrão.

Agradecimentos

RTC agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo n. 401567/2023-0), pelo suporte financeiro parcial.

Apêndice

Para maior clareza e conveniência, este apêndice apresenta explicitamente a forma matricial dos termos utilizados ao longo da Seção 3.

$$\mathcal{G}(\phi)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{F}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & e^{-i\phi}\cos\theta \\ 0 & 0 & e^{i\phi}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -e^{-i\phi}\cos\theta & 0 & 0 \\ -e^{i\phi}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Xi^{\dagger}=-\frac{i}{m}\begin{bmatrix} p\sin\theta & e^{-i\phi}(\mathrm{E}-p\cos\theta) & 0 & 0 \\ -e^{i\phi}(\mathrm{E}+p\cos\theta) & -p\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p\sin\theta & e^{-i\phi}(\mathrm{E}+p\cos\theta) \\ 0 & 0 & -e^{i\phi}(\mathrm{E}-p\cos\theta) & p\sin\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}=\begin{bmatrix} \mathrm{E}^2+2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & 2e^{-i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & 0 & 0 \\ 2e^{i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & \mathrm{E}^2-2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E}^2-2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & -2e^{-i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta \\ 0 & 0 & -2e^{i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & \mathrm{E}^2+2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}^{-1}=\begin{bmatrix} \mathrm{E}^2-2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & -2e^{-i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & 0 & 0 \\ -2e^{i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & \mathrm{E}^2+2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{E}^2+2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 & 2e^{-i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta \\ 0 & 0 & 2e^{i\phi}\mathrm{E}p\sin\theta & \mathrm{E}^2-2p\cos\theta\mathrm{E}+p^2 \end{bmatrix},$$

Referências

[1] B. Agarwal, P. Jain, S. Mitra, A. C. Nayak e R. K. Verma. "ELKO fermions as dark matter candidates". Em: **Phys. Rev. D** 92 (2015), pp. 075027–075037. DOI: 10.1103/PhysRevD.92.075027.

[2] D. V. Ahluwalia. "Evading Weinberg's no-go theorem to construct mass dimension one fermions: Constructing darkness". Em: **Europhys. Lett.** 118 (2017), pp. 60001–60009. DOI: 10.1209/0295-5075/118/60001.

[3] D. V. Ahluwalia. "The theory of local mass dimension one fermions of spin one half". Em: **Adv. Appl. Clifford Algebras** 27.3 (2017), pp. 2247–2285. DOI: 10.1007/s00006-017-0775-1.

[4] D. V. Ahluwalia e D. Grumiller. "Spin half fermions with mass dimension one: Theory, phenomenology, and dark matter". Em: **JCAP** 0507 (2005), pp. 012–90. DOI: 10.1088/1475-7516/2005/07/012.

[5] D. V. Ahluwalia, C.-Y. Lee e D. Schritt. "Self-interacting Elko dark matter with an axis of locality". Em: **Phys. Rev. D** 83 (2011), pp. 065017–65031. DOI: 10.1103/PhysRevD.83.065017.

[6] I. M. Benn e R. W. Tucker. **An introduction to spinors and geometry with applications in physics**. Bristol: Adam Hilger, 1987. ISBN: 0-85274-169-3.

[7] E. Cartan. **The theory of spinors**. New York: Dover Publications, 1981. ISBN: 978-0-486-64070-9.

[8] R. T. Cavalcanti e J. M. Hoff da Silva. “Unveiling mapping structures of spinor duals”. Em: **Eur. Phys. J. C** 80.4 (2020), pp. 325–336. DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-7896-8. arXiv: 2004.00385 [physics.gen-ph].

[9] C. Chevalley. **The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras: Collected Works**. Vol. 2. Berlin: Springer, 1996. ISBN: 978-3540570639.

[10] P. A. M. Dirac. “The quantum theory of the electron”. Em: **Proc. Roy. Soc. A** 117 (1928), pp. 610–624. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.

[11] E. Hitzer, T. Nitta e Y. Kuroe. “Applications of Clifford’s Geometric Algebra”. Em: **Adv. Appl. Clifford Algebras** 23 (2013), pp. 377–404. DOI: 10.1007/s00006-013-0378-4.

[12] J. Vaz Jr e da R. da Rocha. **An introduction to Clifford algebras and spinors**. Oxford: Oxford University Press, 2016. ISBN: 978-0198836285.

[13] S. Lang. **Algebra**. Berlin: Springer, 2002. ISBN: 978-0387953854.

[14] H. B. Lawson e M. L. Michelsohn. **Spin Geometry**. Princeton: Princeton University Press, 1998. ISBN: 978-0-691-08542-5.

[15] C. P. Milies e S. K. Sehgal. **An Introduction to Group Rings**. Vol. 1. Dordrecht: Springer, 2002. ISBN: 978-1-4020-0238-0.

[16] D. S. Passman. **The Algebraic Structure of Group Rings**. New York: Dover Publications, 2011. ISBN: 978-0471022725.

[17] W. Pauli. “Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons”. Em: **Z. Physik** 43 (1927), pp. 601–623. DOI: 10.1007/BF01397326.

[18] M. E. Peskin e D. V. Schroeder. **An Introduction to Quantum Field Theory**. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5. DOI: 10.1201/9780429503559.

[19] R. J. Bueno Rogerio e C. H. Coronado Villalobos. “Non-standard Dirac adjoint spinor: The emergence of a new dual”. Em: **EPL** 121.2 (2018), pp. 21001–21008. DOI: 10.1209/0295-5075/121/21001.

[20] J. M. Hoff da Silva e R. T. Cavalcanti. “Further investigation of mass dimension one fermionic duals”. Em: **Phys. Lett. A** 383.15 (2019), pp. 1683–1688. DOI: 10.1016/j.physleta.2019.02.041.

[21] S. Weinberg. **The Quantum Theory of Fields**. Vol. I Foundations. Cambridge: Cambridge Universaity Press, 2005. ISBN: 978-0521670531.

