

Ortogonalidade e Vibrações Forçadas de uma Viga Dupla Euler-Bernoulli

Rosemaira D. Copetti¹, Eduarda N. Ebling²
UFSM, Santa Maria, RS

Resumo. A análise da resposta forçada de vigas é essencial em áreas como engenharia civil, mecânica e aeroespacial, nas quais a vibração pode afetar o desempenho ou até mesmo a durabilidade das estruturas. Na engenharia de máquinas, por exemplo, vigas em sistemas de transmissão podem sofrer vibrações devido a forças de excitação que podem ser aleatórias, impulsivas ou periódicas. Neste trabalho, considera-se um sistema composto por duas vigas de Euler-Bernoulli acopladas por uma camada viscoelástica e sujeitas a uma camada elástica. A resposta forçada é obtida em termos da solução fundamental associada ao sistema. A solução fundamental, por sua vez, é expressa em função das frequências naturais e dos modos de vibração. Cada modo de vibração está associado a uma frequência natural e apresenta uma forma característica de vibrar. A obtenção de uma condição de ortogonalidade entre os modos de vibração é imprescindível para o cálculo da resposta forçada, pois permite o desacoplamento do sistema.

Palavras-chave. Vigas Euler-Bernoulli, Ortogonalidade, Resposta Forçada, Solução Fundamental

1 Introdução

Determinar a resposta forçada de vigas é um tema fundamental em diversos campos da engenharia, pois permite compreender a dinâmica das estruturas e evitar falhas futuras. Quando uma força externa é aplicada a um sistema mecânico, a resposta obtida depende de vários fatores, como a modelagem matemática, os métodos utilizados para a resolução, os parâmetros adotados, as condições de contorno, entre outros. Compreender o comportamento dinâmico de uma viga é essencial para garantir a segurança e a estabilidade do sistema.

O objetivo deste trabalho é determinar a resposta forçada, por meio da solução fundamental, de um sistema formado por duas vigas de Euler-Bernoulli, paralelas, de mesmo comprimento, conectadas por uma camada viscoelástica e apoiadas sobre uma fundação elástica. A solução fundamental matricial associada ao problema é utilizada para formular a equação característica, obter as frequências naturais, determinar a solução da equação modal e, por fim, calcular a resposta forçada, que é dada pela convolução entre a solução fundamental e o forçante.

A obtenção das frequências naturais é crucial para evitar o fenômeno da ressonância, que ocorre quando a frequência de entrada coincide com uma das frequências naturais da viga, amplificando a resposta do sistema. A cada frequência natural está associado um modo de vibração característico dessa frequência. Determinar uma condição de ortogonalidade entre os modos de vibração permite desacoplar o sistema de equações e, assim, obter a resposta forçada.

São realizadas simulações para determinar as frequências naturais, os modos de vibração e a resposta forçada do sistema.

¹rosemaira.copetti@ufsm.br

²eduarda.naysingerebling@gmail.com

2 Formulação do Modelo

O sistema matricial que descreve o deslocamento transversal de um problema dado por duas vigas Euler-Bernoulli acopladas viscoelasticamente e sobre uma fundação elástica, conforme Figura 1, pode ser descrito, na forma matricial evolutiva, como

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}(t, x), \quad (1)$$

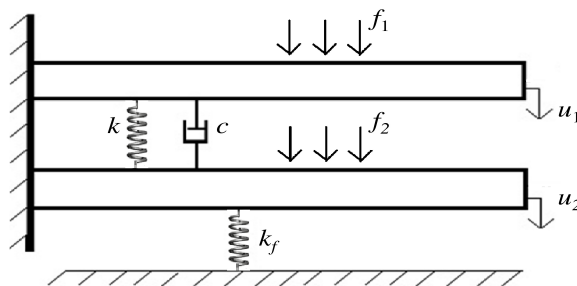


Figura 1: Viga dupla Euler-Bernoulli. Fonte: autora.

onde $\mathbf{u}(t, x)$ e $\mathbf{F}(t, x)$ são vetores 2×1 , e \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são matrizes 2×2 , dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{u}(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \rho_1 A_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 A_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} E_1 I_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k & -k \\ -k & E_2 I_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k + k_f \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Observe que \mathbf{M} e \mathbf{C} são matrizes constantes, enquanto \mathbf{K} é um operador espacial matricial de quarta ordem. As equações de equilíbrio que descrevem o modelo foram obtidas por meio da aplicação do princípio de Hamilton. Para mais detalhes, consulte as referências [4, 5].

$i=1$ indica a viga superior	$i=2$ indica a viga inferior
t : unidade temporal, $t > 0$	x : unidade espacial, $0 < x < L$
L : comprimento das vigas	$u_i(t, x)$: deslocamento transversal da viga
ρ_i : densidade linear de massa	A_i : área da seção transversal
k : elasticidade da camada viscoelástica	c : amortecimento da camada viscoelástica
E_i : módulo de elasticidade de Young	I_i : momento de inércia
$f_i(t, x)$: força externa aplicada	k_f : constante da fundação elástica

3 Análise Modal e Solução Fundamental

Consideremos que o sistema descrito pela equação (1) é excitado harmonicamente com frequência ω , então podemos supor uma solução da forma

$$\mathbf{u}(t, x) = e^{\lambda t} \mathbf{v}(x), \quad \lambda = \omega \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \sqrt{-1}, \quad (4)$$

onde $\mathbf{v}(x) = (v_1 \ v_2)^T$ é o modo de vibração associado à frequência ω . Substituindo a proposta de solução na equação (1), resulta

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^{(iv)}(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo de ordem 2×1 , e o operador \mathbf{K} em equação (3), foi decomposto como soma de dois operadores

$$\mathbf{K} = -\mathbf{A}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - \mathbf{B}, \tag{6}$$

com
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -E_1I_1 & 0 \\ 0 & -E_2I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -k & k \\ k & -k - k_f \end{pmatrix}. \tag{7}$$

A equação (5) é conhecida como equação modal e sua solução, usando a solução fundamental matricial [2], $\mathbf{h}(x)$, pode ser escrita como

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2 + \mathbf{h}''(x)\mathbf{e}_3 + \mathbf{h}'''(x)\mathbf{e}_4 = \mathbf{\Phi}\mathbf{e}, \tag{8}$$

onde

$$\mathbf{\Phi} = (\mathbf{h}(x) \quad \mathbf{h}'(x) \quad \mathbf{h}''(x) \quad \mathbf{h}'''(x)), \quad \mathbf{h}(x) = \begin{pmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) \\ h_{13}(x) & h_{14}(x) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{e} = (e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_j = (e_{j1} \quad e_{j2})^T, \tag{10}$$

\mathbf{e} é um vetor determinado pelas condições de contorno e $j = 1, 2, 3, 4$. A solução fundamental matricial $\mathbf{h}(x)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}^{(iv)}(x) + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{h}(x) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}'(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}''(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}'''(0) &= \mathbf{I}. \end{aligned} \tag{11}$$

O uso da solução fundamental simplifica a forma dos modos e também a equação característica, e pode ser obtida através da fórmula fechada [2],

$$\mathbf{h}(x) = \sum_{j=1}^{4N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(x) \mathbf{h}_{(4N-j)}, \tag{12}$$

onde os b_i 's são os coeficientes do polinômio $P(s)$, \mathbf{h}_k é a solução da equação matricial em diferenças e $d(x)$ é solução do problema de valor inicial, dados, respectivamente, por

$$P(s) = \det(\mathbf{A}s^4 + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})) = \mathbf{0} = \sum_{i=0}^{4N} b_i s^{4N-i}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{h}_{k+4} + (-\lambda^2\mathbf{M} - \lambda\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{h}_k = \mathbf{0}, \quad b_0 d^{4N}(x) + b_1 d^{4N-1}(x) + \dots + b_{4N} d(x) &= 0, \\ \mathbf{h}_0 = 0, \quad \mathbf{h}_1 = 0, \quad \mathbf{h}_2 = 0 \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_3 = \mathbf{I}, \quad d(0) = 0, \quad d'(0) = 0, \quad \dots, \quad b_0 d^{(4N-1)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

4 Condições de Contorno e Equação Característica

As condições de contorno gerais, clássicas ou não clássicas, podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^0 \mathbf{v}(0) + \mathbf{B}_1^0 \mathbf{v}'(0) + \mathbf{C}_1^0 \mathbf{v}''(0) + \mathbf{D}_1^0 \mathbf{v}'''(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_2^0 \mathbf{v}(0) + \mathbf{B}_2^0 \mathbf{v}'(0) + \mathbf{C}_2^0 \mathbf{v}''(0) + \mathbf{D}_2^0 \mathbf{v}'''(0) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_1^L \mathbf{v}(L) + \mathbf{B}_1^L \mathbf{v}'(L) + \mathbf{C}_1^L \mathbf{v}''(L) + \mathbf{D}_1^L \mathbf{v}'''(L) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_2^L \mathbf{v}(L) + \mathbf{B}_2^L \mathbf{v}'(L) + \mathbf{C}_2^L \mathbf{v}''(L) + \mathbf{D}_2^L \mathbf{v}'''(L) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{14}$$

onde para $z = 0, L$ e $i = 1, 2$, temos

$$\mathbf{A}_i^z = \begin{pmatrix} a_{i1}^z & 0 \\ 0 & a_{i2}^z \end{pmatrix}, \mathbf{B}_i^z = \begin{pmatrix} b_{i1}^z & 0 \\ 0 & b_{i2}^z \end{pmatrix}, \mathbf{C}_i^z = \begin{pmatrix} c_{i1}^z & 0 \\ 0 & c_{i2}^z \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_i^z = \begin{pmatrix} d_{i1}^z & 0 \\ 0 & d_{i2}^z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Substituindo $\mathbf{v}(x)$, dado pela equação (8), na equação (14), aplicando as condições de contorno específicas para cada caso considerado, bem como as condições iniciais do problema de valor inicial apresentadas na equação (11), obtemos o sistema:

$$\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

em que a matriz \mathbb{B} (8×16) contém as informações referentes às condições de contorno, a matriz \mathbb{H} (16×8) representa a base de soluções gerada pela solução fundamental nos pontos $x = 0$ e $x = L$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3 \ \mathbf{e}_4)^T$ e $\mathbf{0}$ são vetores (8×1) de constantes e vetor nulo, respectivamente. Observe que a matriz $\mathbb{H}_0^L = \mathbb{H}_0^L(\lambda)$. Soluções não nulas para $\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L \mathbf{e} = \mathbf{0}$ são encontradas, quando $\det(\mathbb{B}\mathbb{H}_0^L) = 0$. Esta equação é denominada equação característica.

Para o caso particular de um sistema composto por duas vigas fixas em $x = 0$ e livres em $x = L$, as condições de contorno são:

$$u_i(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(t, L) = 0, \quad E_i I_i \frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}(t, L) = 0. \quad (17)$$

Substituindo as condições de contorno na equação (8) para $x = 0$, e usando as condições iniciais da equação (11), temos $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}'(0) = \mathbf{0}$, de modo que $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_4 = 0$ na equação (8). Assim, a forma dos modos é simplificada para $\mathbf{v}(x) = \mathbf{h}(x)\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}'(x)\mathbf{e}_2$. Finalmente, a equação característica para a viga dupla fixa-livre Euler-Bernoulli com camada viscoelástica e sobre uma base elástica, é:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{h}''(L) & \mathbf{h}'''(L) \\ \mathbf{h}'''(L) & \mathbf{h}^{(iv)}(L) \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

5 Resposta Forçada

A solução forçada para o problema pode ser expressa por meio da integral [3],

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (19)$$

onde $\mathbf{h}(t, x, \xi)$ é uma matriz 2×2 denominada resposta fundamental matricial, e $\mathbf{F}(t, x)$ é o vetor força externa definido na equação (3). Para a determinar a matriz $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, escreve-se:

$$\mathbf{u}(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{v}^j(x) \eta_j(t), \quad (20)$$

onde $\eta_j(t)$ são coeficientes temporais a serem determinados e $\mathbf{v}^j(x) = [v_1^j(x), v_2^j(x)]^T$ são os j -ésimos modos de vibração do sistema. A resposta forçada será determinada para o sistema não amortecido. Como \mathbf{M} é uma matriz simétrica e definida positiva e \mathbf{K} é uma matriz simétrica, as condições de ortogonalidade entre os modos de vibração são dadas por [1]:

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{v}^j(x), \mathbf{v}^i(x) \rangle = \int_0^L (\mathbf{v}^j)^T(x) \mathbf{K} \mathbf{v}^i(x) dx = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ \omega_i^2 & , \ i = j \end{cases}, \quad (21)$$

$$\langle \mathbf{M}\mathbf{v}^j(x), \mathbf{v}^i(x) \rangle = \int_0^L (\mathbf{v}^j)^T(x) \mathbf{M} \mathbf{v}^i(x) dx = \begin{cases} 0 & , \ i \neq j \\ 1 & , \ i = j \end{cases}, \quad (22)$$

onde ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as frequências naturais do sistema.

Substituindo (20) em (1), com $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, multiplicando à esquerda a equação resultante por $(\mathbf{v}^j)^T(x)$, integrando de 0 a L e usando as equações (21) e (22), segue o sistema desacoplado,

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = G_i(t), \text{ onde } G_i(t) = \int_0^L (\mathbf{v}^i)^T(x) \mathbf{F}(t, x) dx, \quad i = 1, 2, \dots \quad (23)$$

A solução da equação (23), considerando condições iniciais nulas, $\eta_i(0) = 0$ e $\dot{\eta}_i(0) = 0$, é

$$\eta_i(t) = \int_0^t h_i(t - \tau) G_i(\tau) d\tau, \quad (24)$$

onde $h_i(t)$ é a resposta fundamental temporal, solução do problema de valor inicial

$$\ddot{h}_i(t) + \omega_i^2 h_i(t) = 0, \quad h_i(0) = 0, \quad \dot{h}_i(0) = 1, \quad \text{dada por } h_i(t) = \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Substituindo (25) e (23) em (24) e depois (24) em (20), obtém-se

$$\mathbf{u}(t, x) = \int_0^t \int_0^L \mathbf{h}(t - \tau, x, \xi) \mathbf{F}(\tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (26)$$

com a matriz $\mathbf{h}(t, x, \xi)$, 2×2 , dada por

$$\mathbf{h}(t, x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) \mathbf{v}^i(x) (\mathbf{v}^i)^T(\xi). \quad (27)$$

A partir da equação (26), a resposta forçada da primeira e da segunda viga pode ser expressa pelas seguintes integrais:

$$u_1(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{11}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{12}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau, \quad (28)$$

$$u_2(t, x) = \int_0^t \int_0^L (h_{21}(t - \tau, x, \xi) f_1(\tau, \xi) + h_{22}(t - \tau, x, \xi) f_2(\tau, \xi)) d\xi d\tau. \quad (29)$$

6 Simulações

A seguir, são realizadas algumas simulações, com os seguintes parâmetros $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 2 \times 10^3$ kg m⁻³, $A_1 = A_2 = A = 5 \times 10^{-2}$ m², $m = \rho A$, $E_1 = E_2 = E = 1 \times 10^{10}$ N m⁻², $I_1 = I_2 = I = 4 \times 10^{-4}$ m⁴, $k = 1 \times 10^5$ Nm⁻², $c = 8 \times 10^3$ Nm/s, $k_f = 2,5 \times 10^6$ Nm⁻² e $L = 10$ m [4].

Com o objetivo de observar os efeitos dos parâmetros de massa e rigidez no comportamento das frequências e nos modos de vibração foram considerados três casos distintos. Em todos os casos as duas vigas são fixas em $x = 0$ e livres em $x = L$, de modo que a equação característica é dada pela equação (18).

Na Tabela 1 são apresentados as seis primeiras frequências naturais ω_i para os três casos considerados. Na Figura 6, são mostrados os quatro primeiros modos de vibração, e na Figura 3, a resposta forçada correspondente às excitações $f_1 = 4$ e $f_2 = 200 \text{ sen}(2t)$.

CASO 1: $E_1 I_1 = E_2 I_2, \quad \rho_1 A_1 = \rho_2 A_2,$

CASO 2: $E_1 I_1 = 2E_2 I_2, \quad \rho_1 A_1 = 2\rho_2 A_2,$

CASO 3: $2E_1 I_1 = E_2 I_2, \quad 2\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2.$

Tabela 1: Frequências naturais.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
ω_1	31,7728	31,7846	31,7479
ω_2	53,8715	53,8784	53,8568
ω_3	127,2249	127,2283	114,4188
ω_4	161,5888	226,9420	122,3881
ω_5	167,3508	261,6454	127,2384
ω_6	204,8892	326,2969	168,1821

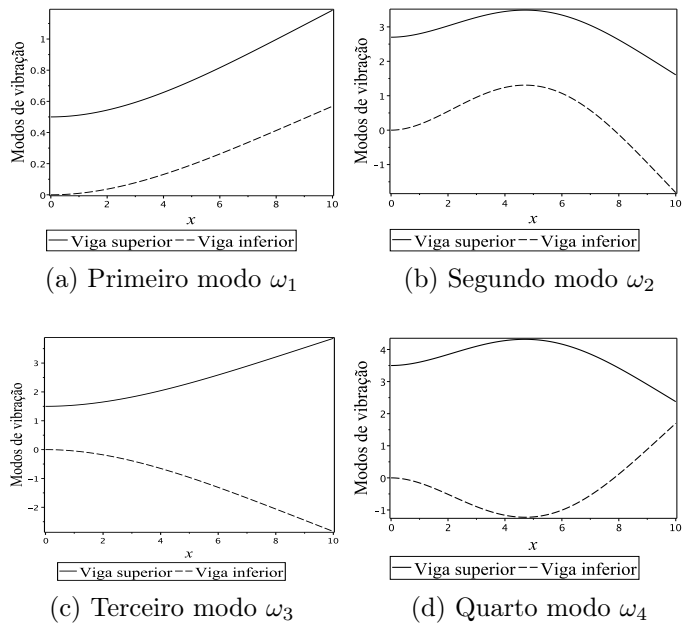


Figura 2: Quatro primeiros modos de vibração para $\omega_i, i = 1..4$. CASO 3. Fonte: autora.

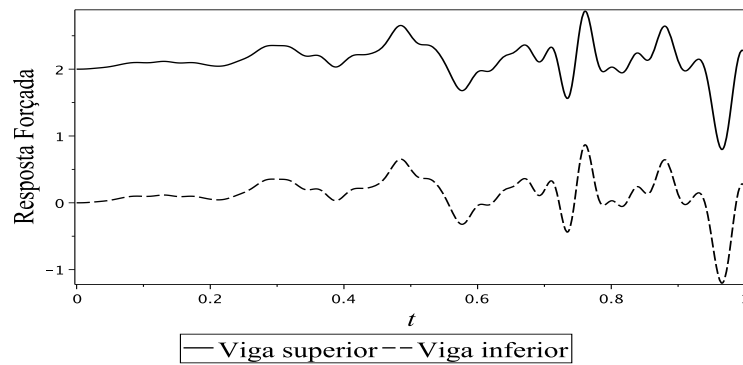


Figura 3: Resposta forçada para a Viga dupla Euler-Bernoulli. Fonte: autora.

7 Considerações Finais

Obter a resposta forçada de vigas desempenha um papel essencial no projeto e na avaliação de estruturas sujeitas a forças externas. Por meio da análise modal, foram obtidas a equação característica, as frequências naturais e os modos de vibração do sistema considerado. A solução fundamental foi empregada para simplificar a forma dos modos, determinar as frequências naturais e expressar a resposta forçada, ampliando assim a classe de problemas que podem ser resolvidos por meio dessa abordagem. Destaca-se a importância da condição de ortogonalidade entre os modos de vibração no desacoplamento das equações utilizadas para determinar a resposta forçada. Para sistemas amortecidos, torna-se necessário estabelecer uma condição de ortogonalidade entre os modos do problema direto e os modos do problema adjunto associado. As simulações realizadas mostraram-se satisfatórias, indicando que o método adotado representa adequadamente o comportamento estrutural da viga.

Referências

- [1] T. K. Caughey. “Classical normal modes in damped linear dynamic systems”. Em: **Journal of Applied Mechanics** 27 (1960), pp. 269–271.
- [2] J. C. Claeysen, G. Canahualpa e C. Jung. “A direct approach to second-order matrix non-classical vibrating equations”. Em: **Applied Numerical Mathematics** 30.1 (1999), pp. 65–78. DOI: 10.1016/S0168-9274(98)00085-3.
- [3] J. R. Claeysen, I. Ferreira e R. D. Copetti. “Decomposition of forced responses in vibrating systems”. Em: **Applied Numerical Mathematics** 47 (2003), pp. 391–405. DOI: .org/10.1016/S0168-9274(03)00087.
- [4] Z. Oniszczuk. “Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system”. Em: **Journal of Sound and Vibration** 232.04 (2000), pp. 387–403. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2744.
- [5] S. S. Rao. **Vibration of Continuous Systems**. New Jersey: Wiley, 2007. ISBN: 9780471771715.