

# Análise e Solução Numérica de um Sistema com Controle Passivo de Vibrações Sob Excitação Estocástica

Magno O. Silva <sup>1</sup>, Bruno C. Cayres <sup>2</sup>, Julien O. Mauprivez <sup>3</sup>, Daduí C. Guerrieri <sup>4</sup>  
Cefet/RJ, Rio de Janeiro, RJ  
Felipe L. C. da Silva <sup>5</sup>  
DEMAT/UFRRJ, Seropédica, RJ

**Resumo.** Este trabalho apresenta uma análise numérica da resposta dinâmica de um sistema estrutural acoplado a um amortecedor de coluna de líquido sintonizado (TLCD), com o objetivo de avaliar sua eficácia no controle passivo de vibrações sob excitação estocástica. A equação diferencial do movimento do sistema foi resolvida numericamente utilizando o método Runge-Kutta adaptativo (RK45). Os resultados demonstraram que o TLCD reduz de forma significativa as amplitudes de deslocamento e velocidade do sistema principal, validando a eficácia do dispositivo em aplicações práticas de engenharia civil ou mecânica. O estudo destaca ainda a importância da análise paramétrica numérica para otimizar os parâmetros físicos e geométricos do TLCD, contribuindo para futuros desenvolvimentos e aplicações desses dispositivos.

**Palavras-chave.** Análise de Vibrações, Amortecedor Passivo, Equações Diferenciais, Cálculo Numérico, Matemática Aplicada

## 1 Introdução

O controle de vibrações indesejadas é essencial em diversas aplicações, abrangendo desde a engenharia civil até sistemas mecânicos e aeroespaciais. Para mitigar esses efeitos, amortecedores são amplamente utilizados como dispositivos de controle de vibração [1]. Dentre as diferentes categorias de amortecedores, destacam-se os de ação passiva, que se caracterizam pela capacidade de dissipar energia sem a necessidade de fontes externas de alimentação, apresentando desempenho otimizado quando projetados com base em critérios sistemáticos de otimização [2]. Nesse contexto, Koutsoloukas, Nikitas e Aristidou [3] concluem que os amortecedores de massa sintonizados (*Tuned Mass Damper* - TMD) passivos continuam sendo a solução predominante na indústria, apesar dos avanços em tecnologias de amortecimento semiativas, ativas e híbridas. Segundo os autores, essa predominância se deve à confiabilidade e ao menor custo dos amortecedores de ação passiva.

Dentre as soluções passivas, os amortecedores de coluna de líquido sintonizado (*Tuned Liquid Column Dampers* - TLCD) surgem como uma alternativa eficaz para o controle de vibração. Esses dispositivos, conforme explicado no trabalho de Konar e Ghosh [4], podem assumir diferentes configurações, empregam o movimento de um fluido em uma coluna para dissipar energia e exploram a ressonância entre o fluido e a estrutura principal. O TLCD tem sido amplamente utilizado em diversas áreas da engenharia devido à sua simplicidade construtiva e eficiência na atenuação de vibrações. De fato, conforme constatado por Khodaie [5], embora a capacidade de controle do

---

<sup>1</sup>magno.silva@cefet-rj.br

<sup>2</sup>bruno.cayres@cefet-rj.br

<sup>3</sup>julien.mauprivez@cefet-rj.br

<sup>4</sup>dadui.guerrieri@cefet-rj.br

<sup>5</sup>felipeleite@ufrj.br

TMD seja relativamente superior à do TLCD, a maior segurança operacional, o menor custo de instalação e manutenção e a versatilidade de aplicação do TLCD o tornam uma alternativa mais viável para diversas aplicações práticas.

A análise da equação do movimento de um sistema com TLCD permite compreender o efeito desse tipo de amortecedor e otimizar seus parâmetros para maximizar a dissipação de energia. Com base no trabalho de Sadek, Mohraz e Lew [6] e em correlação com a pesquisa de Di Matteo, Lo Iacono, Navarra e Pirrotta [7], a equação do movimento de um sistema com dois graus de liberdade, composto por um sistema SDOF (*Single Degree of Freedom*) acoplado a um TLCD, é descrita pela equação (1), cujos parâmetros estão ilustrados na Figura 1 (a).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_s + \gamma A_v L & \gamma A_v \alpha L \\ \gamma A_v \alpha L & \gamma A_v L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \gamma A_v \xi | \dot{y}(t) | \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & 2 \gamma A_v g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} \\ & = - \begin{Bmatrix} M_s + \gamma A_v L \\ \gamma A_v \alpha L \end{Bmatrix} \ddot{x}_g(t) \end{aligned} \quad (1)$$

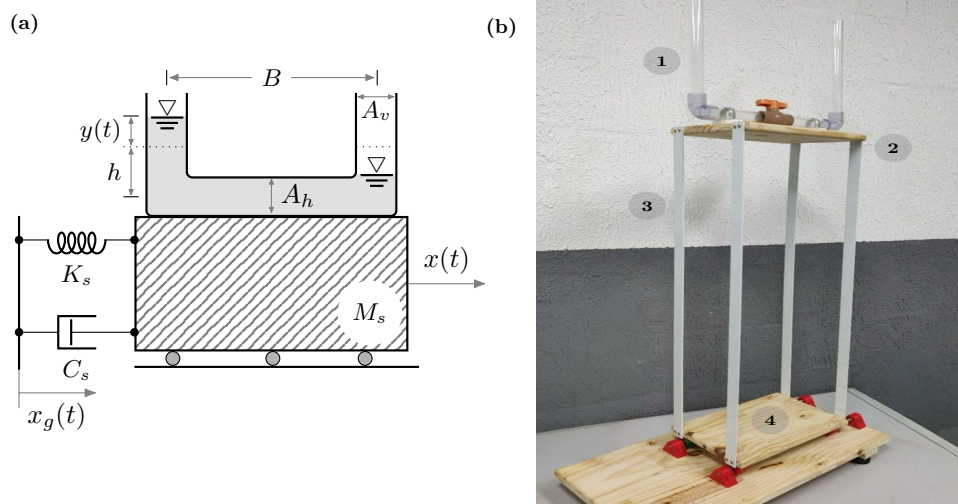


Figura 1: (a) Modelo dinâmico simplificado de um sistema com um grau de liberdade e um TLCD anexado, ilustrando os principais parâmetros do sistema vibratório. (b) Bancada experimental para ensaios, composta por: (1) TLCD, responsável pela dissipação passiva de energia; (2) plataforma superior de fixação; (3) hastes de alumínio que sustentam a estrutura e, (4) base deslizante que permite o movimento oscilatório do sistema. Fonte: Produzido pelos autores.

Os parâmetros do sistema são definidos da seguinte forma:  $M_s$  representa a massa do sistema principal;  $\gamma$  é a densidade do fluido;  $\xi = \eta \cdot \nu^2$  onde  $\eta$  representa a perda de carga e  $\nu$  a razão entre as áreas das seções transversais vertical e horizontal do TLCD, respectivamente denotadas por  $A_v$  e  $A_h$ ;  $\alpha$  corresponde à razão entre a largura do tubo  $B$  e o comprimento efetivo do fluido  $L = 2h + \nu B$ . A constante gravitacional é representada por  $g$ . Além disso,  $C_s$  é o coeficiente de amortecimento do sistema principal e  $K_s$  a rigidez do sistema. Por fim,  $x(t)$  e  $y(t)$  são, respectivamente, o

deslocamento relativo do sistema principal e deslocamento do líquido nas colunas verticais do TLCD, e  $\ddot{x}_g(t)$  a aceleração do solo.

Portanto, o presente trabalho trata da solução numérica da equação (1), considerando um conjunto de parâmetros experimentais físicos e geométricos, cuja bancada de ensaio pode ser observada na Figura 1 (b). A formulação do problema envolve a análise da influência dos parâmetros do TLCD na resposta dinâmica do sistema, buscando a compreensão da sua efetividade na redução de vibrações indesejadas. Como objetivo principal, busca-se validar a adequação do modelo matemático em representar o comportamento dinâmico observado experimentalmente.

## 2 Materiais e Métodos

A primeira etapa da pesquisa consistiu na confecção da bancada de ensaio, ilustrado na Figura 1 (b), cuja dimensões são de  $0,60 \times 0,30 \times 1,15$  m. Para adequação experimental, foi adicionada massa, na forma de barra de aço, na plataforma superior da bancada de ensaio. De maneira geral, as características técnicas da bancada podem ser consultadas na Tabela 1.

Tabela 1: Especificações técnicas da bancada de teste.

Componentes	Parâmetro	Valor/Descrição
Sistema SDOF	Massa ( $M_s$ )	5,0978 kg
	Rigidez ( $K_s$ )	143,5133 N/m
	Amortecimento ( $C_s$ )	0,6888 Ns/m
	Frequência natural ( $f_n$ )	0,8445 Hz
TLCD	Área da seção transversal ( $A_v, A_v$ )	0,00035 m <sup>2</sup>
	Densidade do líquido (água) ( $\gamma$ )	1000 kg/m <sup>3</sup>
	Perda de carga ( $\eta$ )	1
	Largura do tubo ( $B$ )	0,3 m
	Nível inicial do líquido ( $h$ )	0,15 m
	Frequência natural	0,9101 Hz

### 2.1 Matrizes da Equação do Movimento

Da equação (1), temos que a matriz massa ( $M$ ) é definida conforme equação (2). Fazendo as devidas substituições dos parâmetros, com base na Tabela 1, tem-se a matriz  $M$  com os seus valores correspondentes.

$$M = \begin{bmatrix} M_s + \gamma A_v L & \gamma A_v \alpha L \\ \gamma A_v \alpha L & \gamma A_v L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,098 & 0,1039 \\ 0,1039 & 0,2078 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Para obter a matriz rigidez ( $K$ ), o presente trabalho usou a fórmula básica da rigidez à flexão de uma viga, representada pela haste de alumínio da bancada de ensaio (ver Figura 1 (b), item 3) em balanço [8], como expresso na equação (3), onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material que para o alumínio está tipicamente em torno de  $69 \cdot 10^9$  Pa ou 69 GPa;  $I$  é o momento de inércia da seção transversal da coluna. Para um retângulo,  $I = w \cdot z^3/12$ , onde  $w$  é a largura,  $z$  é a espessura da viga e  $\ell$  é o comprimento da viga.

$$k = \frac{3EI}{\ell^3}. \quad (3)$$

Substituindo os valores da Tabela 2, que fornece mais detalhes sobre as vigas, na equação (3), e tendo em vista que a bancada tem quatro vigas, segue que a rigidez para o sistema principal é igual a  $K_s = 4k = 143,5133 \text{ N/m}$ .

Tabela 2: Parâmetros das vigas da bancada de teste.

Característica	Valor/Descrição
Material	Alumínio
Comprimento ( $\ell$ )	0,73 m
Largura ( $w$ )	0,0254 m
Espessura ( $z$ )	0,00317 m

Para o fluido temos a força conservativa, oriunda da energia potencial gravitacional do TLCD e é obtida pela expressão  $2\gamma A_v g$  (ver equação (1)) e, com as devidas substituições, tem-se o  $6,7956 \text{ N/m}$ . Portanto, a matriz  $K$  para a equação (1) é dada pela equação (4).

$$K = \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & 2\gamma A_v g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 143,5133 & 0 \\ 0 & 6,7956 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

O amortecimento é uma propriedade mais desafiadora de ser determinada teoricamente, pois depende de vários fatores, incluindo o atrito interno do material, as condições de contorno, a presença de outros elementos no sistema, entre outros. Existem várias técnicas experimentais para determinar o amortecimento, como o método do decaimento logarítmico ou o método da largura de banda. Entretanto, para esta pesquisa, usar-se-á, para o amortecimento do sistema principal, a fórmula  $C_s = 2\beta\omega M_s$ , o que implica que estamos adotando uma abordagem analítica simplificada [9].

O fator de amortecimento  $\beta$  para uma viga de alumínio com extremidades fixas é aproximadamente igual a 2% [10]. Esta é uma estimativa geral e pode variar dependendo de vários fatores. Para obter  $\omega$ , podemos usar a fórmula para frequência natural  $f_n$  para um sistema SDOF, em Hz, que é dada pela equação (5) [11].

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}. \quad (5)$$

Aproveitando o que foi calculado para a matriz  $M$  (ver equação (2)) e fazendo as devidas substituições na equação (5), teremos  $\omega = 0,8444 \text{ Hz}$ . Logo,  $C_s = 0,6888 \text{ Ns/m}$ .

Portanto, a matriz amortecimento da equação (1), cujo elemento da linha 2 e coluna 2 são obtidos por substituição dos valores correspondentes na Tabela 1, onde  $\xi = \eta\nu^2$  e a perda de carga é igual a  $\eta = 1$  [12], pode ser observada na equação (6).

$$C = \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma A_v \xi | \dot{y}(t) | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6888 & 0 \\ 0 & 0,175 | \dot{y}(t) | \end{bmatrix}. \quad (6)$$

## 2.2 Método Numérico

Buscando consistência e confiabilidade na solução do sistema de equações diferenciais, o presente trabalho aplica um integrador de Runge-Kutta de ordem adaptativa. Após avaliar as opções de implementação, optou-se por utilizar a função `solve_ivp`, do módulo `scipy.integrate` em Python.

A excitação utilizada na solução numérica corresponde a um sinal estocástico, gerado pela equação (7) em que  $A(t)$  é uma variável aleatória com distribuição normal,  $A(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , e  $\Omega(t)$  é a frequência angular.

$$\ddot{x}_g(t) = A(t) \sin(t\Omega(t)). \quad (7)$$

Diferentemente da formulação original, na qual  $\Omega(t)$  era modelada por uma distribuição normal,  $\Omega(t) \sim \mathcal{N}(\omega_s, 0, 25)$ , neste trabalho,  $\Omega(t)$  é considerada como uma variável aleatória com distribuição Weibull, escolhida de forma a apresentar valores estritamente positivos. Os parâmetros da Weibull foram ajustados de modo que a média de  $\Omega(t)$  seja igual a equação (8), correspondente à frequência natural do sistema principal e o desvio-padrão seja aproximadamente 0,25.

$$\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{M_s + \gamma A_v L}}. \quad (8)$$

Essa formulação permite reproduzir com maior realismo situações de excitação dinâmica, incluindo flutuações tanto na amplitude quanto na frequência da aceleração do solo.

### 3 Resultados e Discussão

Para avaliar a eficácia do TLCD, as simulações foram realizadas em dois cenários distintos, com o amortecedor em operação, ou seja, modelo de dois graus de liberdade (2 DOF), e com o TLCD inoperante, resultando em um modelo simplificado com um único grau de liberdade (SDOF). Essa comparação permite quantificar objetivamente a eficácia do TLCD em reduzir amplitudes de deslocamento e velocidades do sistema principal.

Na Figura 2 (a), observa-se que o deslocamento  $x(t)$  do sistema principal apresenta amplitude menor quando o TLCD está ativo, em comparação ao cenário inoperante. Isso sugere que a energia vibratória está sendo parcialmente absorvida pelo movimento do fluido no TLCD, o que confirma o funcionamento adequado do amortecedor passivo em reduzir as oscilações do sistema principal. Em termos de evolução temporal, verifica-se também um amortecimento mais rápido do sinal com TLCD, demonstrando que a dissipação de energia ocorre de forma mais efetiva.

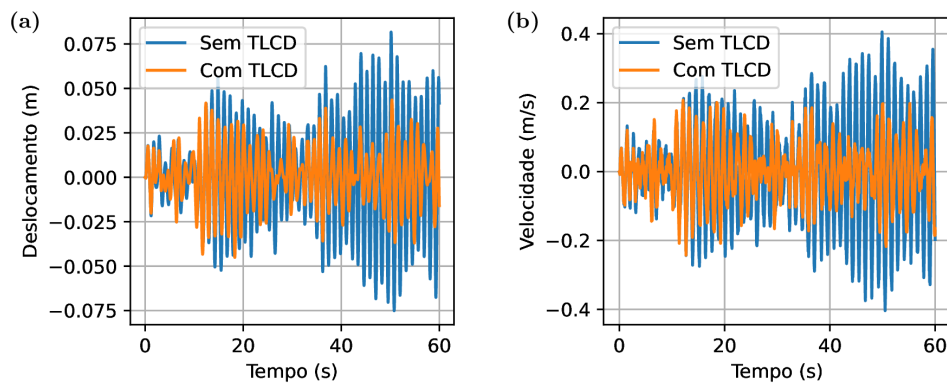


Figura 2: (a) Evolução temporal do deslocamento  $x(t)$  do sistema principal ao longo do tempo, comparando o caso sem TLCD (linha azul) e com TLCD (linha laranja). (b) Evolução da velocidade  $\dot{x}(t)$  do sistema principal nas mesmas condições de excitação aleatória sem e com TLCD. Fonte: Produzido pelos autores.

Na Figura 2 (b) é possível notar a mesma tendência ao comparar as velocidades  $\dot{x}(t)$ . A curva associada ao caso com TLCD apresenta oscilações com amplitude notadamente inferior ao longo do período de análise, indicando menor velocidade de pico em relação à condição sem TLCD. Esse resultado reforça a eficácia do dispositivo em limitar não apenas o deslocamento, mas também

a intensidade das trocas de energia cinética no sistema, o que reduz potencialmente os esforços dinâmicos na estrutura.

Observa-se no gráfico da Figura 3 (a) que o sistema principal ( $x(t)$ ) e o fluido ( $y(t)$ ) exibem amplitudes distintas ao longo do tempo, mostrando que parte da energia vibratória é transferida para o TLCD. De modo geral,  $|y(t)|$  tende a assumir valores mais elevados em certos intervalos, resultante da absorção e dissipação de energia pelo fluido que, de outra forma, ficaria concentrada no movimento da massa principal.

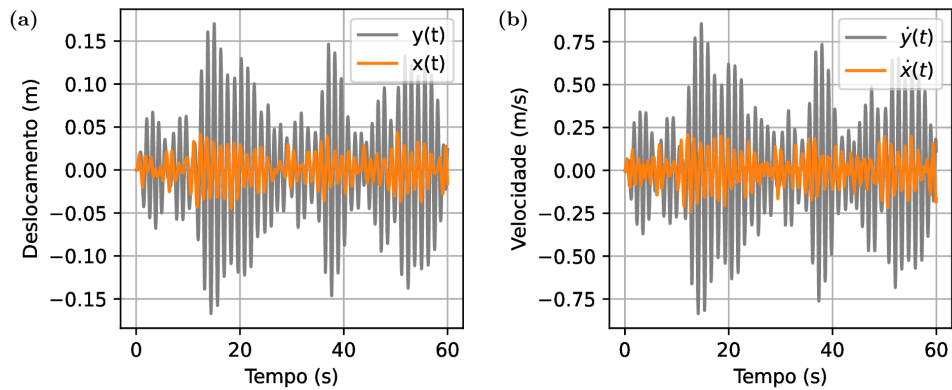


Figura 3: (a) Respostas de deslocamento  $x(t)$  do sistema principal e de  $y(t)$  do fluido no TLCD, sob excitação aleatória. (b) Velocidades correspondentes  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$ . Fonte: Produzido pelos autores.

As velocidades  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$ , ilustradas no gráfico da Figura 3 (b), mostram oscilações complementares, reforçando o mecanismo de troca de energia: quando a estrutura começa a vibrar de forma mais intensa, o fluido responde em oposição de fase, controlando as amplitudes de  $\dot{x}(t)$ . Esse comportamento não linear do amortecimento, associado ao módulo de  $\dot{y}(t)$ , contribui para limitar os picos de velocidade da estrutura, confirmando a efetividade do TLCD no regime estocástico de excitação.

Esses resultados mostram a possibilidade de realizar análises paramétricas com facilidade, o que proporciona um entendimento mais detalhado da influência dos parâmetros físicos e geométricos do TLCD sobre a resposta vibratória do sistema principal. Portanto, o método numérico empregado serve como ferramenta de validação do comportamento experimental e, além disso, como recurso para otimizar configurações e características construtivas do amortecedor.

## 4 Considerações Finais

Neste trabalho, a abordagem numérica utilizando o método Runge-Kutta adaptativo de quarta e quinta ordem (RK45) mostrou-se eficaz na simulação precisa do comportamento dinâmico do sistema estrutural acoplado ao TLCD, considerando efeitos não lineares e excitações estocásticas. Os resultados obtidos demonstraram claramente a eficácia do TLCD como dispositivo passivo na redução significativa das amplitudes de vibração, fornecendo informações relevantes para o desenvolvimento de sistemas mais seguros e eficientes na engenharia civil ou mecânica.

Como perspectiva futura, pode-se integrar a presente abordagem numérica com técnicas de otimização buscando determinar os parâmetros ótimos do TLCD que minimizem efetivamente as respostas vibratórias. Estudos futuros poderiam explorar comparações sistemáticas entre as

configurações otimizadas e as metodologias tradicionais de projeto de amortecedores passivos, ampliando a compreensão das vantagens práticas e teóricas proporcionadas pela abordagem proposta.

## Referências

- [1] M. H. Stanikzai, S. Elias e Y. Chae. “Recent advances in hybrid vibration-control systems”. Em: **Practice Periodical on Structural Design and Construction** 27.3 (2022), p. 03122003. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000685.
- [2] A. K. Agrawal e J. N. Yang. “Design of passive energy dissipation systems based on lqr control methods”. Em: **Journal of Intelligent Material Systems and Structures** 10.12 (1999), pp. 933–944. DOI: 10.1106/FB58-N1DG-ECJT-B8H4.
- [3] L. Koutsoloukas, N. Nikitas e P. Aristidou. “Passive, semi-active, active and hybrid mass dampers: a literature review with associated applications on building-like structures”. Em: **Developments in the Built Environment** 12 (2022), p. 100094. DOI: 10.1016/j.dibe.2022.100094.
- [4] T. Konar e A. D. Ghosh. “A review on various configurations of the passive tuned liquid damper”. Em: **Journal of Vibration and Control** 29.9-10 (2022), pp. 1945–1980. DOI: 10.1177/10775463221074077.
- [5] N. Khodaie. “Parametric study of wind-induced vibration control of tall buildings using TMD and TLCD systems”. Em: **Structures** 57 (2023), p. 105126. DOI: 10.1016/j.istruc.2023.105126.
- [6] F. Sadek, B. Mohraz e H. S. Lew. “Single-and multiple-tuned liquid column dampers for seismic applications”. Em: **Earthquake engineering & structural dynamics** 27.5 (1998), pp. 439–463. DOI: 10.1002/(sici)1096-9845(199805)27:5<439::aid-eqe730>3.0.co;2-8.
- [7] A. Di Matteo, F. Lo Iacono, G. Navarra e A. Pirrotta. “Direct evaluation of the equivalent linear damping for TLCD systems in random vibration for pre-design purposes”. Em: **International Journal of Non-Linear Mechanics** 63 (2014), pp. 19–30. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.03.009>.
- [8] D. J. Inman. **Engineering vibration**. 4. ed., internat. ed. Always Learning. Boston, Mass.: Pearson, 2014. 719 pp. ISBN: 9780132871693.
- [9] S. Rao. **Mechanical Vibrations in SI Units**. Pearson Deutschland, 2017, p. 632. ISBN: 9781292178608. URL: <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9781292178615>.
- [10] ABNT NBR. “6123: Forças devidas ao vento em edificações”. Em: **ABNT Editora, Rio de Janeiro, Brasil** (1988).
- [11] A. Brandt. **Noise and vibration analysis: signal analysis and experimental procedures**. John Wiley & Sons, 2023. ISBN: 9781118962176. DOI: 10.1002/9781118962176.
- [12] J. C. Wu, M. H. Shih, Y. Y. Lin e Y. C. Shen. “Design guidelines for tuned liquid column damper for structures responding to wind”. Em: **Engineering structures** 27.13 (2005), pp. 1893–1905. DOI: 10.1016/j.engstruct.2005.05.009.