Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Introdução à Análise Convexa

Leopoldo A. Sasse[1]
UFSC, Florianópolis, SC
Luiz-Rafael Santos[2]
UFSC, Blumenau, SC

Neste trabalho, abordamos a teoria da convexidade em espaços vetoriais e sua aplicação em funções convexas, tanto em $\mathbb{R}$ como em $\mathbb{R}^n$. Apresentamos definições fundamentais, como conjuntos convexos, funções convexas e propriedades relevantes, incluindo o conceito de suporte e continuidade. Demonstra-se que a convexidade de uma função está associada à convexidade de seu epígrafo, além de resultados que relacionam a natureza do epígrafo de uma função com respeito a sua lei de formação. Resultados clássicos como a Desigualdade de Jensen e propriedades da diferenciabilidade são discutidos.

A convexidade é uma propriedade fundamental em análise matemática e otimização. Conjuntos convexos são aqueles em que qualquer segmento de reta entre dois pontos do conjunto está inteiramente contido nele. Funções convexas, por sua vez, satisfazem a desigualdade de convexidade, garantindo que seu gráfico se mantém abaixo de qualquer corda que ligue dois pontos pertencentes ao traço do mesmo.

Na simbologia matemática, um conjunto C em um espaço vetorial é convexo se,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1]. \tag{1}$$

Motivando-se na definição acima, constrói-se a teoria de funções convexas definidas em conjuntos convexos, as quais obedecem à seguinte desigualdade:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \forall x, y \in Dom(f), \forall \lambda \in [0,1]. \tag{2}$$

Tais funções possuem propriedades importantes, como crescimento monótono das derivadas laterais, continuidade e peculiaridades geométricas características. Dentre algumas dessas propriedades, temos resultados abordando o fato de que o epígrafo de uma função convexa é um conjunto convexo, e essa equivalência pode ser usada para definir funções convexas; ademais, sua continuidade é garantida no interior de seu domínio devido à convexidade. Em particular, se uma função é diferenciável, então sua convexidade equivale à monotonicidade de sua derivada, podendo-se relacionar suas derivadas de primeira e segunda ordem no tocante à convexidade da função.

Trazem-se também resultados clássicos originados da convexidade de funções, como a Desigualdade de Jensen, que fornece uma generalização da convexidade para combinações convexas de pontos e é utilizada para demonstrar a continuidade de funções convexas em $\mathbb{R}^n$.

Discute-se, também, com relação a métricas que munem o $\mathbb{R}^n$, mostrando que estas, quando induzidas por norma, sempre satisfazem a definição de convexidade para funções. Além disso, pode-se mostrar que a norma-p satisfaz a desigualdade triangular utilizando apenas resultados provenientes do estudo da convexidade através da demonstração da Desigualdade de Minkowski.

A convexidade tem aplicações amplas em otimização convexa, análise funcional e economia matemática. Em otimização, funções convexas garantem que mínimos locais são também mínimos globais, facilitando o desenvolvimento de algoritmos eficientes. Na análise funcional, conceitos de

[1]leopoldo.sasse@gmail.com
[2]lrsantos11@gmail.com

convexidade aparecem em espaços normados e desigualdades fundamentais. Além disso, a teoria da convexidade desempenha um papel crucial na matemática aplicada e teórica, trazendo propriedades que destacam sua relevância e evidenciam o potencial da convexidade para com o estabelecimento de resultados fundamentais em análise matemática.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal de Santa Catarina e ao CNPq pelo suporte financeiro e acadêmico durante a realização deste estudo. Além disso, agradecem aos professores e colegas que contribuíram com sugestões valiosas e discussões enriquecedoras ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Também expressam sua gratidão às suas famílias pelo apoio incondicional e incentivo contínuo.

Referências

[1] H. H. Bauschke e P. L. Combettes. **Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces**. 2. ed. Springer, 2017.

[2] E. L. Lima. **Análise Real, vol. 1: Funções de Uma Variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Coleção Matemática Universitária).

[3] E. L. Lima. **Álgebra Linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).

[4] R. T. Rockafellar. **Convex Analysis**. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[5] R. Webster. **Convexity**. 1. ed. New York: Oxford University Press, 1994.