Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Cálculo Variacional com Condição Inicial Fuzzy e Condição Final Livre

Jônathas D. S. de Oliveira[1]
CEFET-MG, Belo Horizonte, MG
Rodney C. Bassanezi[2]
UNICAMP, Campinas, SP

O cálculo variacional é uma ferramenta poderosa para resolver problemas de otimização em sistemas dinâmicos, com aplicações em física, engenharia e outras áreas. Nesta proposta, apresentamos uma extensão do cálculo variacional clássico para tratar problemas com condição inicial fixa e condição final livre, onde a condição inicial é modelada como um número fuzzy. A abordagem utiliza a extensão de Zadeh [1] para generalizar a solução clássica e acomodar incertezas presentes na condição inicial.

Diniz [2] estudou o problema de cálculo variacional e controle ótimo com condição inicial fuzzy, porém a condição final era previamente determinada, ou seja, foi verificado que o mínimo local de um problema de cálculo variacional com condição inicial fuzzy

$$\begin{gathered} \min_{x\in C^1([0,t_f])} J\left(x\right) = \textstyle\int_0^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt \\ x\left(0\right) = \widehat{x_0} \quad x\left(t_f\right) = x_f \end{gathered} \tag{1}$$

com $\widehat{x_0}$ fuzzy, é a extensão de Zadeh da solução clássica em relação à condição inicial (baseado em uma determinada relação de ordem).

No entanto, existem situações onde a condição inicial não é previamente conhecida. Nesse sentido, o principal objetivo deste trabalho é estender os resultados de [2] para o caso em que a condição final do problema de cálculo variacional não é previamente especificada. Buscamos demonstrar que, mesmo com a condição final livre, a solução ótima continua sendo dada pela extensão de Zadeh da solução clássica em relação à condição inicial fuzzy. Especificamente, analisamos o seguinte problema:

$$\begin{gathered} \min_{x\in C^1([0,t_f])} J\left(x\right) = \textstyle\int_0^{t_f} F(t,x,\dot{x})dt \\ x\left(0\right) = \widehat{x_0}, \quad x\left(t_f\right) \qquad livre, \end{gathered} \tag{2}$$

com $\widehat{x_0}$ fuzzy.

A ideia é que, supondo que para cada $x_0 \in [x_0^L, x_0^R]$ o problema clássico tenha solução ótima (única), então podemos definir a aplicação que a cada $x_0 \in [x_0^L, x_0^R]$ associa a solução ótima $x^*(t)$

$$\begin{array}{rcl} \rho : [x_0^L, x_0^R] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{X} \\ x_0 & \longrightarrow & x^*(.) \end{array} \tag{3}$$

onde $\mathbb{X} \subset \mathcal{C}^1[t_0, t_f]$, munido da norma $\|x\|_{1,\infty} = \sup_{t\in[t_0,t_f]}\{|x(t)|\} + \sup_{t\in[t_0,t_f]}\{|x'(t)|\}$.

[1]jonathas.math.oliveira@gmail.com
[2]rodney@ime.unicamp.br

Definição 1. *Definimos a extensão de Zadeh de ρ como solução do problema de cálculo variacional (2).*

No contexto da teoria dos números fuzzy, é essencial estabelecer ferramentas matemáticas adequadas para lidar com problemas de otimização. A definição da extensão de Zadeh, fundamentada no cálculo variacional, fornece uma base sólida para tratar funções e operações envolvendo números fuzzy. Contudo, para formalizar a abordagem, é necessário definir previamente a relação de ordem utilizada no espaço fuzzy, bem como o conceito de minimizador, que desempenha um papel crucial na análise de problemas variacionais em nosso contexto.

Definição 2. *Sejam $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$ números fuzzy. Dizemos que $\widehat{u} \preceq \widehat{v}(\widehat{u} \prec \widehat{v})$ se e somente se $[\widehat{u}]^\alpha \preceq [\widehat{v}]^\alpha([\widehat{u}]^\alpha \prec [\widehat{v}]^\alpha)$, respectivamente) para todo α.*

Definição 3. *Seja (M, d) um espaço métrico e $\mathbb{P}$ um conjunto parcialmente ordenado segundo a relação de ordem $\preceq_p$. Considere uma função $f : M \mapsto \mathbb{P}$ e $x^* \in \Omega \subset M$. Dizemos que x^* é um minimizador local de f quando existe um $\delta > 0$, tal que, $f(x^*) \preceq_p f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$. Caso $f(x^*) \preceq_p f(x)$, para todo $x \in \mathbb{P}$, x^* é dito minimizador global de f em $\mathbb{P}$. .*

Em [3] foram desenvolvidos todos os resultados necessários para que pudéssemos demonstrar o Teorema 1, que constitui o principal teorema deste trabalho. Ele consolida a proposta de extensão do cálculo variacional clássico para o caso em que a condição inicial é fuzzy e a condição final é livre, reafirmando que a solução ótima obtida corresponde à extensão de Zadeh da solução clássica. Trata-se, portanto, da principal contribuição teórica deste estudo.

Teorema 1. *Seja o problema*

$$\begin{gathered} \min_{x \in C^1([0,t_f])} J\left(x\right) = \int_0^{t_f} \left[F(t,x,\dot{x})\right] dt \\ x\left(0\right) = \widehat{x_0} \;\; e \;\; x\left(t_f\right) \qquad livre \end{gathered} \tag{4}$$

com $\widehat{x}_0 \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. Se

- *$F(t, x, \dot{x})$ for contínua em relação a todas as variáveis;*
- *O funcional $J(x)$ for convexo;*
- *A solução do problema clássico for contínua em relação à $x_0 \in [x_0^L, x_0^R]$ e monótona não-decrescente com relação à condição inicial.*

Então $\widehat{x}^*(t, \widehat{x_0})$ é minimizador do Problema (4) para toda $\widehat{x}(t, \widehat{x_0})$ pertencente ao conjunto viável de (4) conforme a definição de minimizador dada em 3.

Referências

[1] L. C. De Barros, R. C. Bassanezi e W. A. Lodwick. **First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics**. Springer, 2016.

[2] M. M. Diniz. “Otimização de funções, funcionais e controle fuzzy”. Tese de doutorado. Unicamp, 2016.

[3] J. D. S. de Oliveira. “Sobre cálculo variacional e controle ótimo fuzzy com aplicações”. Tese de doutorado. Unicamp, 2018.