Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Modelagem Fracionária do Potencial Gravitacional de uma Massa Pontual

Thiago M. Marchesin[1]
Licenciatura em Física, Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru-SP
Matheus A. G. Da Costa[2]
Licenciatura em Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, P. Prudente-SP

O cálculo de ordem não inteira, popularmente conhecido como Cálculo Fracionário (CF), é um campo do conhecimento que se dedica à generalização dos operadores de integração e derivação para ordens não inteiras. Sua origem remonta a uma troca de correspondências entre L'Hôpital e Leibniz, onde foi discutido o significado de uma derivada de ordem $1/2$, ou seja, "a ordem inteira de derivadas e integrais pode ser estendida, não apenas a frações, mas a todo número racional, irracional e complexo?" Em resposta, Leibniz afirmou: "Isso leva a um paradoxo, do qual um dia serão tiradas consequências úteis" [1].

Entretanto, somente com o trabalho de Caputo em 1969, intitulado *Elasticità e Dissipazione*, o CF ganhou força na matemática aplicada. Entre as diversas aplicações, podem ser citados problemas de biologia [1], viscosidade [2], mecânica quântica [3] e outros [1].

No entanto, ao tratar do estudo da rotação de galáxias, pouco é discutido sobre a aplicação do CF nessa área (Para mais detalhes sobre rotação de galáxias, o leitor é direcionado a ref. [4]). Por conta disso, o presente trabalho busca compreender o efeito da aplicação dos operadores fracionários em rotações de galáxias. Para isso, será considerada a seguinte modificação:

$$\nabla^2\Phi(r) = 4G\pi\rho(r) \Rightarrow \left(\frac{1}{\tau^{2-2s}}\right)(-\Delta)^s\Phi(r) = -4G\pi\rho(r), \tag{1}$$

onde $\Phi(r)$ descreve o potencial gravitacional, G é a constante gravitacional de valor $6.6743 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$, $(-\Delta)^s$ nosso operador fracionário, nesse caso, o laplaciano fracionário[5] e $\frac{1}{\tau^{2-2s}}$ é o fator de correção dimensional [6]. Quando $s = 1$, recuperamos o caso de ordem inteira. Considerando o perfil de uma partícula pontual de massa M, teremos:

$$\left(\frac{1}{\tau^{2-2s}}\right)(-\Delta)^s\Phi(r) = -4G\pi M\delta^3(r), \tag{2}$$

aplicando a transformada de Fourier e sua inversa, podemos encontrar o potencial com essa configuração:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\left(\tau^{2-2s}\right)\frac{2^{2-2s}G\,M}{\pi^{1/2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3-2s}{2}\right)}{\Gamma(s)}\,\frac{1}{r^{3-2s}}. \tag{3}$$

Com o potencial, podemos utilizar a seguinte relação [4]:

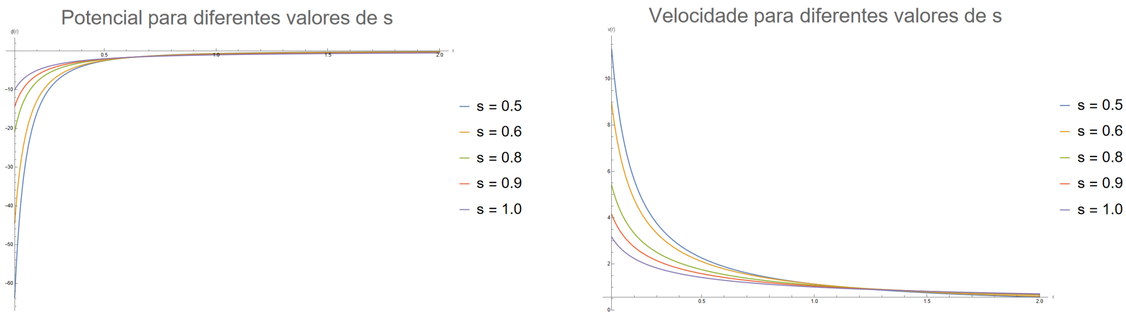
$$v(r) = \sqrt{r\frac{d\Phi(r)}{dr}}, \tag{4}$$

[1]thiago.m.marchesin@unesp.br
[2]matheus.agenor@unesp.br

para obter a velocidade de rotação da galáxia. Portanto, substituindo a equação (3) na (4):

$$v(r) = \sqrt{\frac{3-2s}{\tau^{2s-2}} \frac{2^{2-2s} G\, M}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-2s}{2}\right)}{\Gamma(s)}}\, r^{-\frac{3-2s}{2}}. \tag{5}$$

Considerando $G = M = \tau = 1$ e variando s entre 0 e 1, podemos construir os gráficos das equações (3) e (5) no intervalo de 0,01 a 2:



(a) Potencial gravitacional para uma massa pontual.

(b) Velocidade de rotação para uma massa pontual.

Figura 1: Potencial gravitacional (a) e velocidade de rotação (b) associados a uma massa pontual para diferentes valores de s. Fonte: Autores.

Pelas Figuras 1 e 2, observamos que, ao variar o valor de s, quanto mais próximo de 0, menor é a taxa de crescimento do potencial, e a velocidade decai de forma mais suave. Além disso, notamos que, quando $r \to \infty$, $\Phi(r) \to 0$ e $r \to 0$, $\Phi(r) \to -\infty$ para qualquer $s \in [0, 1]$. Os próximos passos deste trabalho buscarão estudar diferentes perfis de densidade, como o exponencial, e aplicar o perfil de velocidade em bojos de galáxias do catálogo SPARC [7], visando determinar o valor de s mais adequado.

Referências

[1] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. 1st. São Paulo: Livraria da Física, 2015. ISBN: 9788578613297.

[2] M. Caputo. **Elasticita e dissipazione**. 1st. Bologna: Zanichelli, 1969.

[3] R. Herrmann. **Fractional Calculus: An Introduction for Physicists**. Singapore: World Scientific, 2011.

[4] D. C. Rodrigues e A. Hernández-Arboleda. “Rotação de galáxias e matéria escura”. Em: **Cadernos de Astronomia** 2.1 (2021), pp. 6–33. DOI: `10.47456/Cad.Astro.v2n1.33939`.

[5] M. Daoud e E. H. Laamri. “Fractional Laplacians: A Short Survey”. Em: **Discrete & Continuous Dynamical Systems – S** 15.1 (2022), pp. 95–116. DOI: `10.3934/dcdss.2021027`.

[6] L. K. B. Kuroda e R. F. Camargo. “Generalização da Modelagem Fracionária”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 8.1 (2021). DOI: `10.5540/03.2021.008.01.0418`.

[7] F. Lelli, S. S. McGaugh e J. M. Schombert. “SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves”. Em: **The Astronomical Journal** 152.6 (2016), p. 157. DOI: `10.3847/0004-6256/152/6/157`.