Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Estudo das Equações Diferenciais com Retardo Contínuo por Transformadas de Laplace

André C. N. M. da Silva[1] Michele M. Lopes [2] Laécio C. de Barros[3]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Neste trabalho, apresentamos a metodologia de transformada de Laplace para encontrar soluções das equações diferenciais com retardo contínuo, na qual a função de densidade de probabilidade beta desempenha um papel fundamental.

Diz-se que a variável aleatória $X : \Omega \to [0,1]$ tem distribuição beta, se sua função de densidade de probabilidade for dada por [1]:

$$f_X(x;p,q) = \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, x \in [0,1], \tag{1}$$

em que $p, q > 0$ e $B(p,q)$ é a função beta.

As equações diferenciais com retardamento são um tipo de equação diferencial, em que a derivada, em um instante t, depende da função incógnita em um instante anterior, $t-\tau$, com $\tau > 0$, denominado retardamento [2].

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \text{ com } t \geq 0, \tag{2}$$

Por exemplo, a equação diferencial:

$$y'(t) = y(t-1), \tag{3}$$

é um caso de equação diferencial com retardo discreto, sendo $\tau = 1$. Segundo [3], o modelo que considera o caso em que τ é contínuo (ou distribuído) que assume a forma da EDO (2) é:

$$y'(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau) g(t-\tau) d\tau, \tag{4}$$

com $g(t)$ como um fator de ponderação que indica a importância que deve ser dada ao tamanho de y em momentos anteriores para determinar o efeito atual, sendo denominado como a memória da equação [3]. Aqui no trabalho, utilizamos como memória $g(t)$ a função densidade de probabilidade beta e empregamos as transformadas de Laplace para encontrar a solução da equação diferencial com retardamento contínuo. Para isso, aplicamos a transformada de Laplace em ambos os lados da Equação (4).

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} y(\tau) g(t-\tau) d\tau\right\}. \tag{5}$$

Seja $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$. Aplicando a propriedade da derivada de Laplace e a transformada da convolução à Equação (5) e reorganizando para obter $Y(s)$, temos [4]:

[1] a230144@dac.unicamp.br
[2] lopesmm@ime.unicamp.br
[3] laecioba@unicamp.br

$$Y(s) = \frac{y(0)}{s - G(s)}, \tag{6}$$

Agora, vamos resolver um caso específico em que $g(t)$ é a distribuição de probabilidade beta com parâmetros $p = 2$ e $q = 1$, conforme a Equação (1). Assim, temos $g(t) = 2t$. Aplicando $G(s) = \mathcal{L}\{2t\} = \frac{2}{s^2}$ na Equação (6):

$$Y(s) = \frac{y(0)s^2}{s^3 - 2}. \tag{7}$$

Aplicando o método das frações parciais para encontrar a transformada inversa de (7), temos:

$$y(t) = \frac{y_0}{3} e^{\sqrt[3]{2}t} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3} y_0 e^{\sqrt[3]{2^{-2}}t} sen(\sqrt{3\sqrt[3]{2^{-4}}}t) + \frac{2}{3} y_0 e^{\sqrt{3\sqrt[3]{2^{-4}}}t} sen(3\sqrt[3]{2^{-4}}t) + \frac{2\sqrt{27}}{27} y_0 e^{\sqrt[3]{2^{-4}}t} sen(3\sqrt{2^{-4}}t) \tag{8}$$

A seguir, apresentamos a solução $y(t)$, Equação (8):

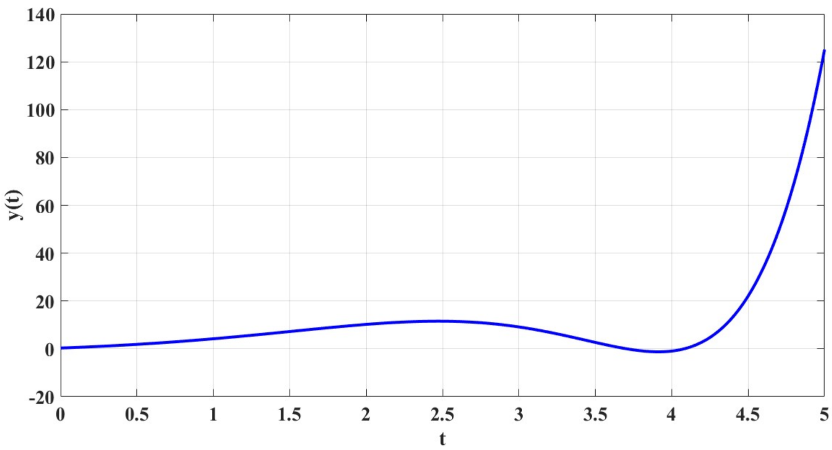

Figura 1: Equação (8), com $y(0) = 1$. Fonte: autor (2025).

Os operadores fracionários possuem memória, conforme descrito pelas distribuições beta [1]. Nesse sentido, a Equação diferencial (4), quando $g(t)$ é uma distribuição beta, apresenta uma relação natural com as equações diferenciais fracionárias baseadas na derivada de Caputo. Estamos investigando essa relação ao comparar equações diferenciais com retardo e o cálculo fracionário.

Referências

[1] L. C. Barros, M. M. Lopes, F. S. Pedro, E. Esmi, J. P. C. dos Santos e D. E. Sánchez. "The Memory Effect on Fractional Calculus: An Application in the Spread of Covid-19". Em: **Computational and Applied Mathematics** 40 (2021), pp. 1–21.

[2] A. Bellen e M. Zennaro. **Numerical Methods for Delay Differential Equations**. London: Oxford University Press, 2003.

[3] J. D. Murray. **Mathematical Biology: I an Introduction.** New York: Springer-Verlag, 2002, 14p.

[4] M. R. Spiegel. **Transformada de Laplace.** Mexico: Polytechnic Institute, 1996, 131p.

