Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Interpolação com Entradas e Saídas Dadas por Números Fuzzy: Aplicação Envolvendo Projéteis

Laécio C. Barros[1], Kadu V. T. Paulino[2], Estevão E. Laureano[3]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Este estudo aborda a interpolação de dados incertos pertencentes à classe dos números fuzzy na forma $r+qA$, com $r,q \in \mathbb{R}$ e A um número fuzzy assimétrico, representada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$. Tal conjunto é um espaço de Banach [1].Além disso, o operador $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$, definido por $\Phi(r+iq) = r+qA$, garante que $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ é isomorfo e isométrico ao corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ [2]. Por meio do isomorfismo Φ, as operações aritméticas dos números fuzzy $B = r+qA$ e $C = s+pA$ podem ser reescritas da seguinte forma

$$\begin{aligned} &B \oplus C = (r+s)+(q+p)A, && B \ominus C = (r-s)+(q-p)A, \\ &B \odot C = (rs-qp)+(sq+rp)A, && B \oplus C = \left(\tfrac{rs+qp}{s^2+p^2}\right)+\left(\tfrac{qs-rp}{s^2+p^2}\right)A \end{aligned} \tag{1}$$

desde que $C \neq 0$ na divisão. Tais operações permitem boa manipulação de dados com incerteza, diferentemente do tratamento clássico de interpolação e spline fuzzy [3]. Com essa estrutura algébrica, o polinômio interpolador na forma de Lagrange é dado por [4]

$$L_k(X) = (\prod_{j\neq k}(X \ominus X_j)) \oplus (\prod_{j\neq k}(X_k \ominus X_j)), \quad X \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}A}. \tag{2}$$

A aplicação considerada é adaptada de [5]. O experimento envolve projéteis disparados perpendicularmente contra uma placa metálica, causando perfurações. O objetivo é estabelecer uma relação entre a velocidade limite V, dada em metros por segundo, necessária para perfurar o alvo e o quociente de formato do nariz Q, definido como a razão entre o comprimento do nariz e o da haste do projétil. Esses valores são representados por números fuzzy triangulares simétricos na forma $(m-s; m; m+s)$, denotado por seu centro m e dispersão s, que em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ podem ser expressos como $m+sA$. Inicialmente, $A = (-1;0;1)$, mas para garantir que $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ satisfaça as propriedades algébricas de um corpo (assimetria) [2], adotamos $A = (-0.99;0;1)$. Na Tabela 1 os dados são apresentados.

Utilizando a metodologia de [4], obtemos o polinômio de Lagrange $p_4 : \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ de grau 4 que interpola os dados da Tabela 1 (b)

$$\begin{aligned} p_4(Z) = {} & Z^4 \odot (-52193.59+5782.54A) \oplus Z^3 \odot (43297.07+7842.35A) \\ & \ominus Z^2 \odot (9630.12+6067.09) \oplus Z \odot (225.89+984.22A) \\ & \oplus (865.48+28.91A). \end{aligned} \tag{3}$$

A interpolação fuzzy é mostrada na Figura 1 (a). Para interpolação spline, o conceito de intervalo é necessário para esta formulação [4]. Com isso, a interpolação deve ser realizada na forma $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$. Assim, consideramos os dados de entrada Q da Tabela 1 (b) sem a parte fuzzy, já que nesse caso, o domínio de p são os reais. O resultado da interpolação linear é mostrado na Figura 1 (b).

[1]laeciocb@ime.unicamp.br
[2]k243307@dac.unicamp.br
[3]eelaureano@gmail.com

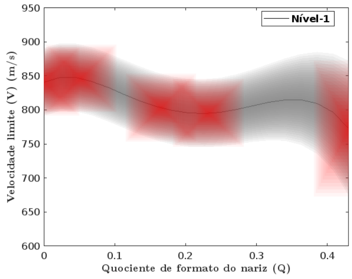
Tabela 1: Dados experimentais do quociente de formato do nariz e velocidade simétricos na forma triangular (a) e convertidos para $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ em (b), com $A = (-0.99; 0; 1)$.

$Q = (q - \tau, q, q + \tau)$	$V = (v - \omega, v, v + \omega)$
$(-0.05; 0; 0.05)$	$(791; 841; 891)$
$(0.02; 0.052; 0.102)$	$(796; 846; 896)$
$(0.115; 0.165; 0.215)$	$(753; 803; 853)$
$(0.182; 0.232; 0.282)$	$(745; 795; 845)$
$(0.381; 0.431; 0.481)$	$(672; 772; 872)$

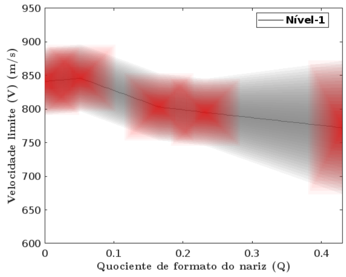
(a)

$Q = q + \tau A$	$V = v + \omega A$
$0.000 + 0.050A$	$841 + 50A$
$0.052 + 0.050A$	$846 + 50A$
$0.165 + 0.050A$	$803 + 50A$
$0.232 + 0.050A$	$795 + 50A$
$0.431 + 0.050A$	$772 + 100A$

(b)



(a)



(b)

Figura 1: Representação da interpolação fuzzy em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}(A)}$ para $\tau = 0.05$, $q \in [0, 0.43]$ e $A = (-0.99; 0; 1)$. O polinômio de Lagrange é apresentado em (a). Em (b) é representado a spline linear. As regiões vermelhas representam os pares de dados fornecidos, ou seja, $Q_i \times V_i$, para $i = 1, \ldots, 5$. Fonte: dos autores

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelo CNPq sob os processos 314885/2021-8 e 311976/2023-9, FAPESP sob os processos 2022/00196-1 e 2023/06478-1. Os autores também reconhecem o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Brasil

Referências

[1] E. Esmi, F. S. Pedro, L. C. Barros e L. Lodwick, "Frechet derivative for linearly correlated fuzzy function," **Information Sciences**, v. 435, pp. 150–160, 2018.

[2] L. Barros, E. Esmi, F. Simoes e M. Shahidi, "Toward calculus for functions with fuzzy inputs and outputs," **Fuzzy Sets and Systems**, v. 518, pp. 21–42, 2025. DOI: 10.1016/j.fss.2025.109495.

[3] O. Kaleva, "Interpolation of fuzzy data," **Fuzzy Sets and Systems**, v. 61, pp. 63–70, 1994.

[4] K. V. T. Paulino, L. C. Barros, E. Esmi, F. S. P. Simões e V. F. Wasques, "Interpolation with Fuzzy Input and Output and Spline Function: Application to Diffusive Models," em **Proceedings of the 2025 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**, Reims, France, 2025, pp. 1–4.

[5] A. Celmins, "Least Squares Model Fitting to Fuzzy Vector Data," **Fuzzy Sets and Systems**, v. 22, pp. 245–249, 1987.

