

Métodos Topológicos Aplicados à Análise: Uma Abordagem para a Existência de Soluções Periódicas em Equações Diferenciais Não Suaves

Joel A. Ch. Albuquerque,¹ Murilo R. Cândido²
DMC/FCT-UNESP, Presidente Prudente, SP

A análise qualitativa de equações diferenciais não-suaves apresenta desafios significativos, sobretudo quando as condições clássicas de regularidade, como a suavidade ou a propriedade de Lipschitz, não são satisfeitas. Nesses casos, os métodos convencionais que utilizam o Teorema da Função Implícita para demonstrar a existência de soluções periódicas se mostram insuficientes, exigindo abordagens alternativas. Uma estratégia promissora consiste em integrar o método de averaging com ferramentas topológicas avançadas, permitindo a detecção e a estabilização de órbitas periódicas mesmo em sistemas com baixa regularidade [1, 3].

O método de averaging tradicionalmente transforma o sistema original por meio de uma perturbação da identidade, isolando os termos dominantes e reduzindo o problema a um sistema “guia”. Entretanto, quando os sistemas apresentam funções não-suaves, esse método deve ser adaptado. Para isso, reestrutura-se o problema em espaços de Banach, o que possibilita a aplicação de conceitos da análise funcional, tais como operadores de Fredholm de índice zero e seus inversos generalizados.

Um dos avanços mais relevantes dessa abordagem é a introdução da técnica do **grau de coincidência**. Essa ferramenta, baseada na teoria do grau, permite estabelecer a existência de zeros de funções não-lineares, mesmo quando a propriedade de unicidade falha devido à ausência da condição de Lipschitz. Em essência, o grau de coincidência quantifica, de forma topológica, a “diferença” entre o operador identidade e um operador associado ao problema, de modo que um valor não-nulo garante a existência de uma solução. Esse procedimento substitui a condição de não-singularidade da derivada — normalmente exigida na aplicação do Teorema da Função Implícita — por um critério robusto de natureza topológica, capaz de assegurar a continuidade dos zeros da função deslocamento e, conseqüentemente, a persistência das órbitas periódicas [2, 4].

Foram estabelecidas condições suficientes para a existência de soluções periódicas em sistemas não-suaves. A abordagem operatorial aliada ao grau garante a existência das órbitas periódicas mesmo na ausência das condições clássicas. Estudos de caso demonstram a robustez do método e sua aplicabilidade em modelos dinâmicos complexos.

Em síntese, a integração entre métodos topológicos e técnicas de averaging constitui uma abordagem poderosa para o estudo de equações diferenciais não-suaves. A técnica do grau de coincidência, em particular, destaca-se como uma importante ferramenta para superar as limitações impostas pela baixa regularidade dos modelos, permitindo garantir a existência de órbitas periódicas. Os resultados apresentados, tanto em estudos anteriores [1–3] quanto na tese de doutorado [4], demonstram que é possível avançar significativamente na análise qualitativa de sistemas dinâmicos complexos, mesmo quando os métodos clássicos falham. Essa síntese de métodos clássicos e modernos não só amplia a compreensão dos fenômenos dinâmicos, mas também abre novas perspectivas para futuras investigações teóricas e aplicações práticas em diversos campos.

¹joel.albuquerque@unesp.br

²mr.candido@unesp.br

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Brasil. Processo n° 2023/06076 – 0 e á CAPES Portaria n° 76/2010.

Referências

- [1] A. Buică e J. Llibre. “Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree”. Em: **Bulletin des Sciences Mathématiques** 128.1 (2004), pp. 7–22.
- [2] M. R. Cândido, J. Llibre e D. D. Novaes. “Persistence of periodic solutions for higher order perturbed differential systems via Lyapunov–Schmidt reduction”. Em: **Nonlinearity** 30.9 (2017), p. 3560.
- [3] J. A. Sanders, F. Verhulst e J. Murdock. **Averaging methods in nonlinear dynamical systems**. 2^a ed. Vol. 59. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2007.
- [4] F. B. G. Da Silva. “Métodos Topológicos no Estudo de Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Não-Suaves”. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2024.