Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Algumas Considerações sobre Dinâmica de Sistemas de Impacto na Vizinhança de Contatos Visíveis

Jeferson Cassiano[1] Mauricio F. S. Lima[2]
UFABC, Santo André, SP

Os **sistemas de impacto** são um caso especial dos chamados sistemas híbridos. Ver [1] e [3]. Considere um oscilador do tipo massa-mola com uma órbita periódica estável. Agora considere um anteparo posicionado na vizinhança da órbita periódica. Se o anteparo intercepta tal órbita, a dinâmica torna-se bastante rica. Para a tangência da órbita é necessário que o contato seja de ordem par com derivada positiva: uma dobra visível.

Seja uma aplicação contínua $h \in \mathcal{C}^r\left(M^{2n};\mathbb{R}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ e $r \geqslant 1$ suficientemente grande; regular em 0. Então, pelo Teorema da Função Implícita, $\partial H = h^{-1}\left(\{0\}\right)$ é uma subvariedade de codimensão um. Pode-se definir o aberto $H_+ = h^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$.

Definição 0.1. *Seja o par (f, R) um* ***sistema de impacto*** *tal que o campo vetorial f é dado por $f : H_+ \to TH_+$ e a aplicação reset R é dada por*

$$I_d + \boldsymbol{w}\mathcal{L}_f h, \tag{1}$$

I_d sendo a identidade em ∂H e $\boldsymbol{w}$ uma aplicação em ∂H; definida em ∂H_-, $\partial H_\pm = \partial H \cap \left(\mathcal{L}_f h\right)^{-1}\left(\mathbb{R}_\pm\right)$.

Considere que (f, R) tem um contato de ordem $2n$ em x^* ponto periódico, para o parâmetro de bifurcação $\mu = \mu^*$, ou seja, $\left(\mathcal{L}_f^k h\right)(x^*, \mu^*) = 0,\ 0 \leqslant k < 2n$ e $\left(\mathcal{L}_f^{2n} h\right)(x^*, \mu^*) > 0$. Em suma, tem-se uma órbita periódica hiperbólica estável visitando a singularidade $x_{cr} = x^*$ para o parâmetro de bifurcação μ^* (caso não perturbado).

Teorema 0.1. *O conjunto $\left\{grad\left(\mathcal{L}_f^k h\right),\ 0 \leqslant k < 2n\right\}$ é linearmente independente em $(x^*, \mu^*) \Rightarrow \left(\mathcal{L}_f^{2n-1} h\right)\left(\{0\}\right)$ é transversal a $h^{-1}\left(\{0\}\right)$ e a órbita Sx_{cr}, que visita a singularidade x_{cr}.*

A ideia principal da prova deste resultado é o Teorema da Função Implícita aplicado à função $\Phi = \left(h, ..., \mathcal{L}_f^{2n-1} h\right)$. Note que $\Phi(x^*, \mu^*) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. A condição de independência linear surge daí, implicando que $\exists x_{cr} = x_{cr}(\mu)$ singularidade. Note que a condição também assegura a genericidade de todas as singularidades de ordem menor que $2n$.

Como a órbita periódica é transversal a $\Sigma = \left(\mathcal{L}_f^{2n-1} h\right)\left(\{0\}\right) \cap H_-$ em x^* para o caso não perturbado μ^*, Σ pode ser definido como uma seção de Poincaré onde define-se uma aplicação de primeiro retorno $\Pi(\ .\ , \mu) : \Sigma \to \Sigma$ tal que $\Pi(x^*, \mu^*) = x^*$.

Ao perturbar o parâmetro de bifurcação μ de modo a deslocar o ponto fixo $x(\mu)$ de Π da singularidade x_{cr}, duas situações são possíveis: $h\left(x(\mu)\right) > 0$, que é trivial; ou $h\left(x(\mu)\right) < 0$ onde o ponto fixo é virtual já que o fluxo não está definido em $H_- = h^{-1}\left(\mathbb{R}_-^*\right)$. Este segundo caso é o de interesse aqui.

[1] jeferson.cassiano@ufabc.edu.br
[2] mauricio.lima@ufabc.edu.br

Considerando o fluxo virtual em H_-, define-se uma aplicação de primeiro retorno corrigida $\tilde{\Psi} =$

$$= \Psi^{\frac{1-sgn\circ h}{2}} \circ \Pi,\ \Psi = \varphi^{-\Delta_+} \circ R \circ \varphi^{-\Delta_-},\ \Delta_\pm : \partial H_\pm \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\left\{t > 0 :\ \varphi^{-t}(x) \in \Sigma\right\} \quad (2)$$

Sabemos que tal aplicação é $\mathcal{C}^r$ por partes. [3] mostra que ela é Hölder-contínua: $\mathcal{C}^\alpha$ com $\alpha(1) = \frac{1}{2}$, $\alpha(2) = \frac{3}{4}$ e $\alpha(n) = \frac{2}{n}$ para $n \geqslant 3$. Então ela é uniformemente contínua, porém nunca Lipschtz, pois $\alpha_{max} = \frac{3}{4} < 1$.

Teorema 0.2. *Se existir um aberto Ω tal que o grau de Brower $x^* \in \Omega$ e* $\deg\left(\Psi \circ \Pi - I_d, \overline{\Omega}, 0\right) \neq 0$, *então $\exists x(\mu)$ ponto fixo persistente de $\tilde{\Psi}$ tal que $x(\mu^*) = x^*$.*

A idéia da prova é que há um zero de $\Psi \circ \Pi - I_d$ no problema não perturbado com grau de Brower não nulo. Como o grau é preservado por homotopia, no problema perturbado o grau é o mesmo e, portanto ainda há um zero. Ver [2].

Devemos notar que como a órbita do sistema não perturbado é hiperbólica e estável, todos os autovalores estão no interior do círculo de raio unitário. Seja a aplicação $\Pi - I_d$. Como os autovalores complexos surgem aos pares conjugados, o sinal do determinante é dado pelos autovalores reais. Como Σ tem codimensão um, sua dimensão é ímpar, fazendo com que tenhamos uma quantidade ímpar de autovalores reais. Como estes também estão no interior do circulo de raio unitário, temos uma quantidade ímpar de autovalores negativos relacionados a linearizada de $\Pi - I_d$ e, portanto, determinante negativo e grau de Brower -1. A hiperbolicidade garante que não haverá inversão para $h > 0$. Se a condição do teorema for satisfeita, o número de autovalores negativos associado a $\Psi \circ \Pi - I_d$ também é ímpar, fazendo com que o determinante seja também negativo. Neste caso o grau de Brower é $-1 \neq 0$. Note que $\tilde{\Psi}$ é uniformemente contínua. O caso não perturbado tem um ponto fixo $x(\mu^*) = x^*$. Aplicando uma perturbação homotópica e, como o grau de Brower é preservado, então teremos um ponto fixo em $x(\mu)$ no caso perturbado.

Teorema 0.3. *O ponto fixo $x(\mu)$ é instável para μ suficientemente próximo a μ^*.*

A idéia aqui é que como a aplicação do primeiro retorno não é Lipschtz, a norma da derivada de $\tilde{\Psi}$ não fica limitada na vizinhança da singularidade. Assim, pelo menos um autovalor estará fora do círculo de raio unitário no plano complexo.

Agradecimentos

O segundo autor agradece o auxilio da FAPESP, projeto número 2019/10269-3, ao presente trabalho.

Referências

[1] M. di Bernardo, A. R. Champneys, C. J. Budd e Kowalczyk P. **Piecewise Smooth Dynamical Systems - Theory and Aplications**. Vol. 163. London: Springer, 2008. ISBN: 9781846280399.

[2] J. Llibre, A.C. Mereu e D.D. Novaes. "Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems," em: **Journal of Differential Equations** 259 (2015), pp. 4615–4633.

[3] T. R. Perdigao. "Bifurcações em Sistemas Híbridos de Impacto e em Sistemas de Filippov". Tese de doutorado. UFABC, 2024.