Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções Estacionárias da Equação de Kawahara via Funções Inteiras

Rodrigo A. Ribeiro[1], Patrícia N. da Silva [2], Gerson Ledesma[3]
UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Intuitivamente, uma equação diferencial parcial (EDP) é **dispersiva** quando suas soluções de onda se espalham no espaço à medida que o tempo varia. Para uma definição mais formal, considere uma EDP linear

$$F\left(\partial_x, \partial_t\right) u(x,t) = 0, \tag{1}$$

onde F é polinomial nas derivadas parciais. Estamos interessados em soluções planas da forma

$$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{2}$$

onde A é a amplitude, isto é, a altura da onda, k é o número de ondas e ω é a frequência, que indica o número de oscilações em uma unidade de tempo. Todas as constantes são reais.
Dessa forma, u será solução de (1) se, e somente se, $F(ik, i\omega) = 0$. Essa relação é chamada de **relação de dispersão** e caracteriza o movimento de uma onda plana. Assumiremos ω como uma função real de k, ou seja, $\omega = \omega(k)$.
Para a maioria dos casos, é apropriado restringir a atenção aos valores de k que são reais e, nesse caso, ω pode ser real ou complexo, dependendo da EDP. Suponha que uma EDP admita uma solução (2). Então, qualquer crista individual dessa onda se move à velocidade dada por

$$V_f(k) = -\frac{\omega}{k}. \tag{3}$$

Esta expressão é conhecida como **velocidade de fase**. Contudo, no início do século XX, percebeu-se que a energia das ondas se propaga com velocidade diferente, dada por

$$V_g = \frac{d\omega}{dk}, \tag{4}$$

que é chamada de **velocidade de grupo**.

Definição 1. *Dizemos que uma EDP linear é **dispersiva** se $\omega(k)$ é uma função real e sua velocidade de grupo é não constante, ou seja, $\omega''(k) \neq 0$. Uma EDP não linear será dispersiva se sua parte linear for dispersiva.*

Exemplo 1. *A equação de Kawahara é dada por*

$$u_t + u_x + \kappa u_{xxx} + \eta u_{xxxxx} + uu_x = 0. \tag{5}$$

[1]rodrigoandrade13@outlook.com
[2]nunes@ime.uerj.br
[3]guido.ledesma@ime.uerj.br

onde κ e η são números reais tais que $\kappa \neq 0$ e $\eta < 0$. Essa equação modela ondas dispersivas em fluidos. Note que a parte linear dessa equação é $u_t + u_x + \kappa u_{xxx} + \eta u_{xxxxx}$. Logo:

$$\begin{aligned} -i\omega A e^{i(kx-\omega t)} + ikAe^{i(kx-\omega t)} + \kappa(ik)^3 A e^{i(kx-\omega t)} + \eta A(ik)^5 e^{i(kx-\omega t)} &= 0 \\ Aie^{i(kx-\omega t)}\left(-\omega + k - \kappa k^3 + \eta k^5\right) &= 0 \\ \omega(k) &= k - \kappa k^3 + \eta k^5 \end{aligned}$$

daí segue que $\omega''(k) = -6\kappa k + 20\eta k^3$, ou seja, a velocidade de grupo não é constante e, portanto, a equação de Kawahara é dispersiva.

Definição 2. *Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita* ***inteira*** *se for diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$, ou seja, se for holomorfa em todo o plano complexo.*

Funções polinomiais, exponenciais, trigonométricas e hiperbólicas são exemplos de funções inteiras.

Definição 3. *Uma* ***transformação de Möbius*** *é uma função racional da forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Uma de suas aplicações está na teoria de equações diferenciais parciais, como a equação de Kahawara. No estudo das soluções estacionárias dessa equação, as Transformações de Möbius aparecem naturalmente ao analisar funções inteiras associadas ao problema. Determinar quando uma função é inteira pode ser reduzido à verificação da existência de certas Transformações de Möbius, o que simplifica a caracterização dos intervalos para os quais existem soluções estacionárias não triviais.

Dessa forma, as propriedades das Transformações de Möbius não são apenas ferramentas abstratas da análise complexa, mas também desempenham um papel importante na resolução de problemas aplicados, como na estabilidade e comportamento de ondas descritas pela equação de Kawahara.

Neste sentido, foram utilizadas as referências [1] e [3] para um estudo inicial das transformações de Moebius e equações dispersivas. Além do estudo detalhado de [2], estamos interessados também em avançar nos problemas em aberto deixados no artigo.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] F. Linares e G. Ponce. **Introduction to nonlinear dispersive equations. Springer**. 2a. ed. New York: Springer, 2014. ISBN: 9781493921805.

[2] A. L. C. Santos, P. N. Silva e C. F. Vasconcellos. "Entire functions related to stationary solutions of the Kawahara equation". Em: **Electronic Journal of Differential Equations** 43 (2016), pp. 1–13.

[3] E. J. Townsend. **Functions of a complex variable**. 1a. ed. New York: Henry Holt e Company, 1915. ISBN: 9781436566445.