Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um modelo de controle ótimo com difusão para uma população de mósquitos

Cícero A. da S. Filho[1]
UESC, Ilhéus, BA

Neste trabalho, analisamos um problema de controle ótimo associado ao seguinte sistema de equações diferenciais parciais relacionado ao estudado em Calsina e Elidrissi em [2]:

$$\begin{cases} u_t(a,t) + u_a(a,t) + \displaystyle\int_\Omega [m_1(r)H_3(x,t)dx + \mu_1(c)]u(a,t) = 0 & (a,t) \in Q, \\ v_t(x,t) - \alpha\Delta v(x,t) + m_2(r)v(x,t) + \mu_2(L_1(c))v(x,t) = u(l,t) & (x,t) \in \Omega_T, \\ r_t(x,t) - (g(r) - h(L_2(u,v)))r(x,t) = 0 & (x,t) \in \Omega_T \\ u(0,t) = \displaystyle\int_\Omega B(x,t)v(x,t)dx & t \in (0,T), \\ u(a,0) = u_0(a) & a \in (0,l), \\ v(x,0) = v_0(x) & x \in \Omega, \\ r(x,0) = r_0(x) & x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0 & (x,t) \in \partial\Omega_T. \end{cases} \tag{1}$$

Este sistema modela a dinâmica de uma população de mosquitos, considerando a interação entre a forma imatura (aquática) e a forma adulta (alada) dos mosquitos, além da quantidade de recursos disponíveis para a sobrevivência. Na forma adulta, os mosquitos são distribuídos espacialmente em uma região Ω aberta e conexa do $\mathbb{R}^n$.

A primeira equação governa a dinâmica estruturada por idade da população imatura de mosquitos $u = u(a,t)$, onde a representa a idade, e t, o tempo; aqui, $a \in (0,1)$, onde $l > 0$ é denota a idade de maturação, ou seja, a idade em que um indivíduo aquático se torna adulto; $T > 0$ é dado e denota o tempo máximo de interesse; denotamos $Q = (0,l) \times (0,T)$.

A segunda equação representa a dinâmica da população de mosquitos adultos (alados), $v = v(x,t)$, $x \in \Omega$, que como em Calsina e Elidrissi [2], não é estruturada por idade.

A terceira equação governa a variação Ω da quantidade de recursos disponíveis na região Ω no tempo t.

Temos ainda que as funções m_1, m_2, μ_1, μ_2 são as taxas de mortalidade enquanto que B é a taxa de natalidade, u_0, v_o, r_0 são funções não negativas, $H_0, H_1, H_2 \in L^\infty(Q)$ com $H_0, H_1, H_2 \geq 0$ e $L_1(c)$, $L_2(u,v)$ são os operadores integrais:

$L_1 : U \to \mathbb{R}$ e $L_2 : L^\infty([0,T], L^1(0,l)) \times L^\infty([0,T], H_0^1(\Omega)) \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_1(c)(t) &= \int_0^l c(a,t)H_0(a,t)da, \\ L_2(u,v)(x,t) &= \int_0^l u(a,t)H_1(a,t) + v(x,t)H_2(a,t)da, \end{aligned}$$

Esta pesquisa trata da existência de um controle ótimo $c^* \in U$ com

$$\mathcal{F}(c^*) = \min\{\mathcal{F}(c) : \ c \in U\}. \tag{2}$$

[1]cicero@uesc.br

© 2026 SBMAC

onde o funcional $\mathcal{F}(c)$ a ser minimizado é

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(c) \quad &= \rho_0 \int_0^T \int_0^l G(a,u(a,t))dadt + \rho_1 \int_0^T \int_0^l |c(a,t)|^{p_1} dadt \\ &+ \tilde{\rho}_1 \int_0^T \int_0^l |c_t(a,t)|^{\tilde{p}_1} dadt + \overline{\rho}_1 \int_0^T \int_0^l |c_a(a,t)|^{\overline{p}_1} dadt \\ &+ \rho_2 \int_0^T \int_\Omega |v(x,t)|^{p_2} dt + \rho_3 \int_0^T \int_\Omega |r(x,t)|^{p_3} dt,\end{aligned}$$

onde (u, v, r) é a solução do sistema e (1) associado ao controle c. Este controle pode ser interpretado como um agente químico que atua sobre os mosquitos e $\mathcal{F}(c)$ como o custo desta intervenção.

Consideramos $G : (0, l) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada inferiormente tal que $G(a, y)$ é mensurável em a para y fixo, contínua e convexa em y para cada a fixo. Além disso, existe um $q > 1$ e constantes não negativas A e B tais que

$$G(a, y) \leq A + B|y|^q. \tag{3}$$

As constantes $\rho_1,\ \tilde{\rho}_1,\ \overline{\rho}_1 > 0$ e $\rho_2,\ \rho_3 \geq 0$, os expoentes $p_1,\ \tilde{p}_1,\ \overline{p}_1,\ p_2,\ p_3 \geq 1$ são dados e U é definido como sendo o conjunto dos controles.

Na primeira parte do trabalho, nos concentramos na questão da existência, unicidade e na busca por estimativas das soluções para o sistema em questão. A principal ferramenta que utilizamos foi o Teorema do Ponto Fixo de Banach. A abordagem foi aquela adotada por Silva Filho e Boldrini em [4]. Mas aqui a populção é distribuída em uma região Ω, gerando assim um sistema de segunda ordem, enquanto que em [4], não foi considerada a distribuição espacial dos mosquitos. Dessa forma, devido à natureza da segunda ordem do sistema, foi necessário complementar nossa abordagem com resultados de regularidade elíptica, o que nos permitiu obter estimativas importantes para a garantia da existência e unicidade das soluções para o sistema (1).

Na segunda parte do trabalho, foi mostrado a existência de um controle ótimo associado a este sistema. A técnica utilizada também foi a mesma usada por Silva Filho e Boldrini em [4] . Foram aplicadas sequências minimizantes através de estimativas obtidas das soluções do sistema. Por outro lado, a convexidade de G, resultados de compacidade e a estimativa (3) foram cruciais na obtenção de estimativas adicionais, visto que aquelas do sistema (1) não foram suficientes para a passagem ao limite.

Para finalizar, apresentamos aqui outras refêrencias importantes onde foram obtidos resultados que se relacionam a este trabalho são [1] e [3].

Referências

[1] V. Barbu e M. Iannelli. "Optimal control of population dynamics". Em: **J. Optim. Appl.** 102 (1999), pp. 1–14. DOI: 0022-3239/99/0700-0001.

[2] A. Calsina e O. Elidrissi. "Asymptotic behaviour of a semilinear age-structured population model with a dynamics for the resource". Em: **Math. Comput. Modelling** 35 (2002), pp. 403–427. DOI: 10.1016/S0895-7177(01)00174-1.

[3] C. A. d. S. Filho e J.L. Boldrini. "Mathematical analysis of a non-convex optimal control problem for age-structured mosquito populations". Em: **Math. Meth. Appl. Sci** 48 (2024), pp. 1381–1410. DOI: 10.1002/mma.10389.

[4] C.A. Silva Filho e J.L. Boldrini. "An analysis of an optimal control problem for mosquito populations". Em: **Nonlinear Analysis: Real World Applications** 42 (2018), pp. 253–377. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2018.01.010.

 © 2026 SBMAC