Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Determinação dos parâmetros α e b da função de Cobb - Douglas, através do método dos mínimos quadrados

João Socorro Pinheiro Ferreira **Nágela Rafaela Bastos Silva**
Colegiado de Licenciatura em Matemática
Universidade Federal do Amapá, UNIFAP
E-mail: joaoferreira@unifap.br
68.903-419 - Macapá - Amapá

RESUMO

Este texto é resultado de projeto de pesquisa dos acadêmicos supracitados, sob orientação do Professor João Ferreira, cuja temática é a matemática aplicada. Tendo como objetivo principal a utilização de um método numéricos para a obtenção das constantes da solução de problemas científicos, mais especificamente a solução da EDP modeladora do problema de Cobb-Douglas – dois americanos que na década de vinte do século XX, propuseram um modelo matemático para a previsão da economia americana, em um período de vinte e quatro anos – utilizando dados oficiais dos boletins econômicos americanos. Pesquisou-se em várias obras do gênero – sendo que algumas apresentam a EDP de Cobb-Dougras e a sua solução algébrica – no caso uma função de duas variáveis reais, mas nenhuma mostra como se obter os parâmetros α e b. Sendo assim, neste trabalho, a partir dos dados fornecidos por [3], linearizou-se a função solução e com auxílio da planilha Excel, obteve-se os parâmetros desconhecidos. Ao final do trabalho, são discutidos os resultados da solução da EDP de Cobb-Douglas, com a simulação de alguns valores para medir o erro existente.

Palavras-chave: *Matemática Aplicada, Modelagem, EDP, Iniciação Científica, Parâmetros.*

1 INTRODUÇÃO

Em 1928, Charlles Cobb e Paul Douglas publicaram um estudo no qual modelava o desempenho da economia norte americana durante o período de 1899 a 1922. Eles adotaram uma visão simplificada na qual a produção era determinada pela quantidade de capital investido e mão de obra empregada. Apesar de existirem muitos outros fatores afetando o desempenho da economia, o modelo mostrou-se bastante preciso. A função potência encontrada para modelar a produção é mostrada na equação (1).

$$P(L,K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha} \qquad (1)$$

Sendo P é a produção total, L, a quantidade de mão de obra e K a quantidade de capital investido. A Equação 1 é a solução da EDP, encontrada na obra [3], conforme Equação 2.

$$\frac{\partial P}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial P}{\partial K}\frac{dK}{dt} = P \qquad (2)$$

Desse modo, para atingir os propósitos deste trabalho, primeiramente linearizou-se a Equação 1 e para determinar os parâmetros **α** e **b**, através do método dos mínimos quadrados de Gauss.

A linearização da Equação 1, é a seguinte (EQUAÇÃO 3):

$$Ln\left(\frac{P}{K}\right) = Ln(b) + \alpha Ln\left(\frac{L}{K}\right) \qquad (3)$$

E pode ser comparada a Equação 4:

$$Y = A + Bx \qquad (4)$$

Sendo que seus coeficientes são:

$$A = Ln(b) \qquad (5)$$

e

$$B = \alpha \qquad (6)$$

Os interceptos A e B (EQUAÇÃO 4) serão calculados a partir do sistema mostrado em [1] (EQUAÇÃO 8). Posteriormente, substituiremos nas equações (5) e (6). Lembramos que a da equação (5) pode-se tirar o parâmetro b, que é um dos propósitos deste trabalho, e da equação (6), temos imediatamente o parâmetro alfa (α). O Valor de b é obtido por:

$$b = e^{A} \qquad (7)$$

2 METODOLOGIA

A obtenção da Equação 1 encontra-se em [3]. Para determinar os parâmetros mencionados, aplicou-se o método dos mínimos quadrados, a partir das demonstrações do método abordado por [1] e [2]. Sendo que em seus estudos, os autores deste artigo, primeiramente efetuaram a linearização da função exponencial e a tabulação dos dados, conforme mostrados na Tabela 1, que está em [3, p. 78] .

Para determinar os interceptos A e B, utilizou - se o sistema linear, mostrado na Equação 8. Os somatórios da última linha da Tabela 1, foram substituídos na Equação 3:

$$\begin{cases} nA + B\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} x_i + B\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \qquad (8)$$

A solução do sistema é A = 0,006902618755 e B = 0,7442384666.

3 RESULTADOS ALCANÇADOS

Substituindo - se os valores de A e B nas Equações 5 e 6, determina - se **α = 0,744238466** e **b = 1,006926496**, que arredondando - se para duas casas decimais, tem-se os resultados existentes em [3].

Substituindo-se o valor de **α** e **b**, na Equação 1, tem-se:

$$P(L, K) = \mathbf{1{,}01} L^{0,75} K^{0,25} \qquad (9)$$

A Equação 9, representa a modelagem da economia americana no período citado na durante todo este trabalho.

Após atingir os propósitos deste trabalho, verificaremos a seguir se os mesmos irão produzir os resultados existentes na referência [3]. Para isso, calculou-se a produção nos anos de 1910 e 1920, a partir da mão de obra e do capital investidos naquela época e obtiveram-se os valores aproximados a saber:

$$1910 \quad \Rightarrow \quad P(147, 208) = 1{,}01 \times (147)^{0,75} \times (208)^{0,25} = 161,9$$

$$1920 \quad \Rightarrow \quad P(194, 407) = \mathbf{1{,}01} \times (194)^{0,75} \times (407)^{0,25} = 235,8$$

que estão muito próximos dos valores dados de acordo com [3].

Com isso, o modelo proposto por Cobb-Douglas mostrou-se satisfatório para os dados da economia americana durante os 24 anos estudados, conforme os resultados obtidos acima.

REFERÊNCIAS

[1] BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; CAMPOS FILHO, F. F.; CARVALHO, M. L. B.; MAIA, M. L. **Cálculo numérico**: com aplicações. 2. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1987.

[2] BURIAN, Reinaldo; LIMA, Antonio Carlos de; HETEM JUNIOR, Annibal. **Cálculo numérico**. Reimpr. Rio de Janeiro: 2011. (Fundamentos de Informática).

[3] STEWART, James. Calculo: volume II. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0145