

Simulações Numéricas e o Fenômeno de *Scattering* na Equação Zakharov-Kuznetsov Generalizada em 2D

Francisco A. Paranhos,¹ Luccas Campos,² Denise Bulgarelli³
 ICEX/UFMG, Belo Horizonte, MG

Este trabalho tem como objetivo estudar e simular numericamente o fenômeno de *scattering* (espalhamento) das soluções do problema de valor inicial (PVI) associado a Equação de Zakharov-Kuznetsov Generalizada (gZK) em duas dimensões espaciais ([1, 4, 5, 7, 8, 10, 11]):

$$\begin{cases} u_t + \partial_x \Delta u \pm \partial_x(u^{k+1}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{N} \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

No contexto de equações dispersivas não-lineares, o espalhamento ocorre quando a evolução temporal de certo dado inicial pode ser bem aproximada pela solução de uma equação linear. Nessa situação, os efeitos não-lineares não são capazes de produzir, por exemplo, uma solução do tipo *onda solitária*, nem mesmo de causar o colapso da onda.

A equação gZK é uma versão multidimensional da Equação de Korteweg-de Vries Generalizada (gKdV), que é utilizada para modelar a propagação de ondas em canais em uma dimensão:

$$\begin{cases} u_t + \partial_x^3 u \pm \partial_x(u^{k+1}) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{N} \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (2)$$

A equação gKdV é amplamente estudada desde sua formulação (veja, por exemplo [2, 3, 6, 9]). Dessa forma, existem resultados analíticos que caracterizam a ocorrência de fenômenos de espalhamento com informações obtidas a partir das propriedades das soluções, como a celebrada *fórmula de monotonicidade de Tao* [12], por exemplo. Grosso modo, tal estimativa garante que o *centro de massa* e o *centro de energia* de uma solução da gKdV com um potencial repulsor (com o sinal negativo à frente do termo não-linear) devem se mover com velocidades distintas. Isso permite concluir que não pode haver nenhuma solução similar a sólitons para a equação, e é uma etapa crucial na prova do espalhamento.

Por se tratarem de equações com natureza semelhante, é natural esperar que tais resultados possam ser estendidos, com as devidas modificações, à equação gZK. No entanto, a inclusão de dimensões extras faz com que determinada forma bilinear deixe de ser positivo-semidefinida, deixando em aberto se e em quais condições uma fórmula de monotonicidade análoga pode ser obtida.

Nesse contexto, este trabalho busca implementar um programa computacional que utilize métodos numéricos para resolver o PVI associado à equação gZK, bem como preparar diferentes classes de dados iniciais para investigar se é possível estabelecer uma desigualdade análoga à *fórmula de monotonicidade* para esta equação e verificar se o fenômeno de espalhamento sempre ocorre.

¹franciscoa@ufmg.br

²lucas@mat.ufmg.br

³bulgarelli@ufmg.br

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG.

References

- [1] H. A. Biagioni and F. Linares. “Well-posedness Results for the Modified Zakharov-Kuznetsov Equation”. In: **Nonlinear Equations: Methods, Models and Applications** (2003), pp. 181–189. DOI: 10.1007/978-3-0348-8087-9_13.
- [2] B. Birnir, C. Kenig, G. Ponce, N. Svanstedt, and L. Vega. “On the Ill-Posedness of the IVP for the Generalized Korteweg-De Vries and Nonlinear Schrödinger Equations”. In: **Journal of the London Mathematical Society** 53 (1996), pp. 551–559.
- [3] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. “Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on \mathbb{R} and \mathbb{T} , J.” In: **Journal of the American Mathematical Society** 16 (2001), pp. 705–749. DOI: 10.1090/S0894-0347-03-00421-1.
- [4] A. V. Faminskii. “The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation”. In: **Differ. Uravn.** 31 (1995), pp. 1070–1081.
- [5] L. G. Farah, F. Linares, and A. Pastor. “A note on the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation: local, global and scattering results”. In: **Journal of Differential Equations** 253 (2012), pp. 2558–2571. DOI: 10.1016/j.jde.2012.05.019.
- [6] L. G. Farah, F. Linares, A. Pastor, and N. Visciglia. “Large data scattering for the defocusing supercritical generalized KdV equation”. In: **Communications in Partial Differential Equations** 43 (2018), pp. 118–157. DOI: 10.1080/03605302.2018.1439063.
- [7] E. Hussain, S. Malik, A. Yadav, S. A. A. Shah, M. A. B. Iqbal, A. E. Ragab, and H. M. A. Mahmoud. “Qualitative analysis and soliton solutions of nonlinear extended quantum Zakharov-Kuznetsov equation”. In: **Nonlinear Dynamics** 112 (2024), pp. 19295–19310.
- [8] S. Islam, M. N. Alam, M. F. Al-Asad, and C. Tunç. “An analytical Technique for Solving New Computational Solutions of the Modified Zakharov-Kuznetsov Equation Arising in Electrical Engineering”. In: **Journal of Applied and Computational Mechanics** 7 (2021), pp. 715–726.
- [9] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. “Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle”. In: **Communications on Pure and Applied Mathematics** 46.4 (1993), pp. 527–620.
- [10] A. N. Nirmala and S. Kumbinarasaiah. “An intriguing numerical strategy for Zakharov–Kuznetsov equation through graph-theoretic polynomials”. In: **Physica Scripta** 99.9 (2024), pp. 95267.
- [11] S. Raut, S. Roy, R. R. Kairi, and P. Chatterjee. “Approximate analytical solutions of generalized Zakharov–Kuznetsov and generalized modified Zakharov–Kuznetsov equations”. In: **International Journal of Applied and Computational Mathematics** 7 (2021), pp. 1–25.
- [12] T. Tao. “Two remarks on the generalised Korteweg de-Vries equation”. In: **Discrete and Continuous Dynamical Systems** 18 (2007), pp. 1–14. DOI: 10.3934/dcds.2007.18.1.