

Modelo SIR Fracionário: um Estudo da COVID-19

Rafael M. Zorzetto¹ Michele M. Lopes² Estevão E. Laureano³ Laécio C. de Barros⁴
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

O modelo epidemiológico SIR foi proposto por Kermack e McKendrick em 1927, o qual divide a população em três categorias: Suscetível, Infectado e Recuperado (ou Removido). Neste modelo, são utilizados dois parâmetros: β , que representa a taxa de transmissão, e γ , que indica a taxa de recuperação dos indivíduos. O modelo SIR é descrito pelas equações

$$\begin{cases} S'(t) &= -\beta SI \\ I'(t) &= \beta SI - \gamma I \\ R'(t) &= \gamma I \end{cases} \quad (1)$$

Os operadores fracionários apresentam o chamado efeito de memória. Assim, para calcular uma derivada ou integral fracionária no instante $t = t_1$, é necessário conhecer valores anteriores. De fato, ao considerar a **integral fracionária de Riemann-Liouville** (${}_{RL}J_t^\alpha$)

$${}_{RL}J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (2)$$

percebe-se que, para determinar o valor da integral em $t = t_1$, é imprescindível conhecer os valores da integral para $t \in (0, t_1)$. As **derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo** são definidas com base na integral apresentada (2), e, por conseguinte, também exibem essa mesma característica de memória.

Para explicitar o efeito de memória presente nesses operadores, Barros et al. escreveram esses operadores na forma de esperança matemática [2]:

$$\begin{aligned} {}_{RL}J_t^\alpha f(t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E[f(tU)]; \quad {}_CD_t^\alpha f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} E[f'(tW)], \alpha \in (0, 1); \\ {}_{RL}D_t^\alpha f(t) &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} E[f(tW)] + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} E[f'(tV)], \alpha \in (0, 1), \end{aligned}$$

em que U , V e W são variáveis aleatórias seguindo as distribuições Beta $U \sim B(1, \alpha)$, $V \sim B(2, 1 - \alpha)$ e $W \sim B(1, 1 - \alpha)$, explicando assim a memória do tipo **histerese**, que é caracterizada pela necessidade de todo o histórico para o conhecimento do presente.

Ao substituir o **kernel** da derivada fracionária de Caputo por uma função exponencial, obtém-se a **derivada fracionária de Caputo-Fabrizio**, expressa por [3]

$${}_{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{m(\alpha)}{1-\alpha} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right) f'(\tau) d\tau, \quad (3)$$

¹r219447@dac.unicamp.br

²mi_martins22@hotmail.com

³eesmi@unicamp.br

⁴laecio@ime.unicamp.br

em que $m(\alpha)$ é uma função normalizadora satisfazendo $m(0) = m(1) = 1$, classificado como derivada fracionária [1] ou não [4]. Neste trabalho, seguiremos a denominação de [1].

É possível expressar este operador também na forma de esperança e, a partir disso, demonstrar que, nesse caso, a memória tem a característica de **delay** ou janela.

Ao escrever esses operadores na forma de esperança matemática, torna-se possível realizar suas análises dimensionais. Dessa forma, a integral de Riemann-Liouville possui dimensão $[T^\alpha]$, as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo possuem dimensão $[T^{-\alpha}]$ enquanto a de Caputo-Fabrizio apresenta a mesma dimensão da derivada clássica, $[T]$.

Ao trocar a derivada clássica do Sistema (1) pelas derivadas fracionárias, os parâmetros β e γ precisam ser redimensionados, fazendo com que as equações do novo modelo sejam dimensionalmente compatíveis. Desse modo, os modelos fracionários são [5]

$$\begin{cases} {}_C D_t^\alpha S(t) = -\beta^\alpha SI \\ {}_C D_t^\alpha I(t) = \beta^\alpha SI - \gamma^\alpha I \\ {}_C D_t^\alpha R(t) = \gamma^\alpha I \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} {}_C F D_t^\alpha S(t) = -\frac{\beta}{\alpha} SI \\ {}_C F D_t^\alpha I(t) = \frac{\beta}{\alpha} SI - \frac{\gamma}{\alpha} I \\ {}_C F D_t^\alpha R(t) = \frac{\gamma}{\alpha} I \end{cases}$$

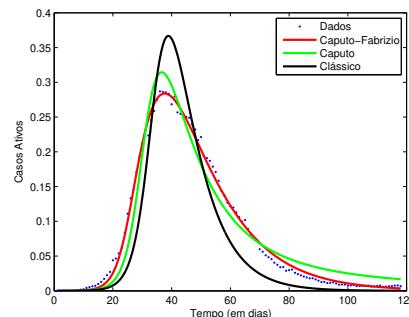


Figura 1: Ajuste dos modelos SIR fracionários – COVID-19 na Suíça. Fonte: Autores.

A Figura 1 ilustra o ajuste dos modelos fracionários apresentados aos dados de infectados por COVID-19 na Suíça, evidenciando a eficácia dessas abordagens.

Referências

- [1] D. Baleanu, A. Jajarmi, H. Mohammadi e S. Rezapour. “A new study on the mathematical modelling of human liver with Caputo–Fabrizio fractional derivative”. Em: **Chaos, Solitons & Fractals** 134 (2020), p. 109705. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109705.
- [2] L. C. Barros, M. M. Lopes, F. S. Pedro, E. Esmi, J. P. C. Santos e D. E. Sánchez. “The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of COVID-19”. Em: **Computational and Applied Mathematics** 40 (2021), p. 72. DOI: 10.1007/s40314-021-01456-z.
- [3] M. Caputo e M. Fabrizio. “A new definition of fractional derivative without singular kernel”. Em: **Progress in Fractional Differentiation & Applications** 1.2 (2015), pp. 73–85. DOI: 10.12785/pfda/010201.
- [4] M. D. Ortigueira e J. T. Machado. “A critical analysis of the Caputo–Fabrizio operator”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 59 (2018), pp. 608–611. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.12.001.
- [5] R. M. Zorzetto. “Um estudo para COVID-19 via derivada fracionária de Caputo e de Caputo–Fabrizio”. Dissertação de mestrado. UNICAMP, 2025.