Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Derivada Fracionária de Riemann-Louville em Termos de Esperança Matemática

Rafael M. Zorzetto[1] Michele M. Lopes[2] Estevão E. Laureano[3] Laécio C. de Barros [4]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

A **integral fracionária de Riemann-Liouville**, denotada por ${}_{RL}J^{\alpha}$ é expressa por [2]

$$ {}_{RL}J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \tag{1} $$

em que $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Observa-se que, quando $\alpha = 1$, ela se reduz à integral convencional.

Este operador fracionário possui o chamado **efeito de memória**, isto é, para determinar ${}_{RL}J^{\alpha} f(t_1)$, $t_1 > 0$, é necessário conhecer todos os valores de $f(t)$ com $t \in [0, t_1]$. De fato, considerando $0 < t_1 < t_2$, tem-se

$$ J_t^{\alpha} f(t_2) - J_t^{\alpha} f(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{t_1}^{t_2} (t_2-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} \left[(t_2-\tau)^{\alpha-1} - (t_1-\tau)^{\alpha-1} \right] f(\tau) d\tau \right], $$

ou seja, a expressão acima depende de valores de $\alpha \in \mathbb{R}^+$, exceto quando $\alpha = 1$, caso em que a expressão acima se reduz à integral clássica, que depende apenas do intervalo $[t_1, t_2]$.

A fim de mostrar o efeito de memória deste operador, Barros et al. [1] o escreveram na forma de esperança matemática:

$$ {}_{RL}J_t^{\alpha} f(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} E[f(tU)], \tag{2} $$

em que U é uma variável aleatória seguindo a distribuição Beta, isto é, $U \sim B(1, \alpha)$ e $E[X]$ é a esperança matemática da variável aleatória X. A derivada fracionária de Riemann-Liouville é obtida através da integral de Riemann-Liouville. Sendo $\alpha \in \mathbb{R}^+$, considere $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$, em que $[\alpha]$ representa a parte inteira de α. Dessa forma, a derivada de Riemann-Liouville é definida da seguinte forma [2]

$$ {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_{RL}J^{n-\alpha} f(t), \tag{3} $$

que, por sua vez, também pode ser escrita na forma de esperança matemática. Para $\alpha \in (1, 2)$, [4] mostrou que

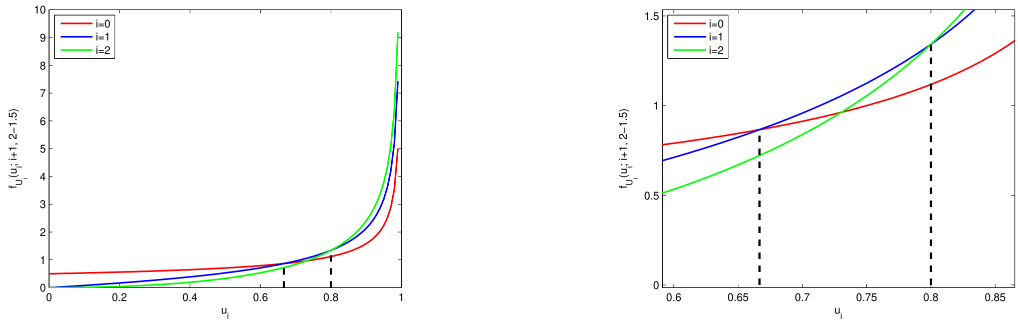
$$ {}_{RL}D^{\alpha} f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} E\left[f(tU_0)\right] + \frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(3-\alpha)} E\left[f'(tU_1)\right] + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} E\left[f^{(2)}(tU_2)\right], \tag{4} $$

em que $U_0 \sim B(1, 2-\alpha)$, $U_1 \sim B(2, 2-\alpha)$ e $U_2 \sim B(3, 2-\alpha)$.

Considerando $f(t)$ uma função que descreve a posição de uma partícula no decorrer do tempo, $f'(t)$ e $f^{(2)}(t)$ indicariam, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula no instante t.

[1] r219447@dac.unicamp.br
[2] mi_martins22@hotmail.com
[3] eesmi@unicamp.br
[4] laeciocb@ime.unicamp.br

Fixando $\alpha = 1.5$, tomando a derivada de Riemann-Liouville de f e considerando a Equação (4), é possível inferir que o peso da função f é maior que o de f' se $u < \frac{B(2,0.5)}{B(1,0.5)} \approx 0.667$ e, de modo semelhante, o peso de $f^{(2)}$ é maior que o de f' se $u > \frac{B(3,0.5)}{B(2,0.5)} = 0.8$, como exibido nas Figuras 1a e 1b.



(a) (b)

Figura 1: Densidades $B(1, 1.5)$, $B(2, 1.5)$ e $B(3, 1.5)$. Fonte: Autores.

A Equação (4) ainda nos permite realizar a análise dimensional deste operador. Ao considerar que t possui dimensão de tempo $[T]$ e que a função f é, por simplicidade, adimensional, tem-se:

$$
\begin{aligned}
[{}_{RL}D^{\alpha} f(t)] &= \left[\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} E\left[f(tU_0)\right]\right] + \left[\frac{2t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(3-\alpha)} E\left[f'(tU_1)\right]\right] + \left[\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)} E\left[f^{(2)}(tU_2)\right]\right] \\
&= \left[T^{-\alpha}\right] + \left[\frac{T^{1-\alpha}}{T}\right] + \left[\frac{T^{2-\alpha}}{T^2}\right] = \left[T^{-\alpha}\right].
\end{aligned}
$$

Dessa forma, em concordância com [3], foi verificado que a dimensão **física** da derivada fracionária de Riemann-Liouville é $[T^{-\alpha}]$ (ou $[tempo^{-\alpha}]$). Tal informação tem sido cada vez mais importante em estudos envolvendo equação diferencial. Os parâmetros em um sistema de equações clássicas muitas vezes precisam ser redimensionalizados ao passar para um sistema na forma fracionária [4], como modelos epidemiológicos [1]. O efeito de memória, capturado pelo modelo fracionário, foi determinante para explicar a importância do controle social/comportamental na dinâmica da COVID-19 [1, 4]. A China, que manteve um controle social rígido, revelou valor alto para α (próximo de 1), ao passo que a Itália, apresentou um valor baixo para α (alta memória).

Referências

[1] L. C. de Barros, M. M. Lopes, F. S. Pedro, E. Esmi, J. P. C. Santos e D. E. Sánchez. "The memory effect on fractional calculus: an application in the spread of COVID-19". Em: **Computational and Applied Mathematics** 40 (2021), p. 72. DOI: 10.1007/s40314-021-01456-z.

[2] K. Diethelm. "The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using operators of Caputo type". Em: **Lecture Notes in Mathematics** (2004).

[3] J. F. Gómez-Aguilar, J. J. Rosales-García, J. J. Bernal-Alvarado, T. Córdova-Fraga e R. Guzmán-Cabrera. "Fractional mechanical oscillators". Em: **Revista mexicana de física** 58.4 (2012), pp. 348–352.

[4] R. M. Zorzetto. "Um estudo para COVID-19 via derivada fracionária de Caputo e de Caputo-Fabrizio". Dissertação de mestrado. UNICAMP, 2025.