

# Aplicação de Teorema de Ponto Fixo a um Modelo de Seleção de Carteiras de Investimento

**Patricia Reis Martins\***

Pós-Graduação em Ciências Computacionais, IME, UERJ,  
20550-013, Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: patriciarm75@yahoo.com.br

**Carlos Frederico Vasconcellos      Patrícia Nunes Silva**

Departamento de Análise Matemática, IME, UERJ,  
20550-013, Rio de Janeiro, RJ  
E-mail: cfredvasc@ime.uerj.br, nunes@ime.uerj.br

## RESUMO

A seleção de carteiras de investimentos é considerada um dos principais problemas em finanças e está diretamente relacionada à Teoria Moderna de Portfólio, que envolve conceitos fundamentais como risco de ativos, retorno esperado de investimentos, correlação entre ativos e diversificação, que podem ser descritos através de conceitos da probabilidade e estatística. Uma solução para o problema de escolha de carteira de investimentos foi proposta por Harry Max Markowitz [4] em 1952, introduzindo a Teoria Moderna de Portfólio, e desde então é fonte de pesquisa e base de estudos em diversos trabalhos na área econômico-financeira.

A Teoria Moderna do Portfólio foi desenvolvida para dar apoio a decisões sobre a distribuição de recursos em carteiras de investimento de ativos financeiros, com o objetivo de definir, dado um conjunto de ativos, como estes devem fazer parte da carteira de investimentos. Isto é, em que proporção,  $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ , estes ativos devem ser ponderados, de forma a maximizar a utilidade esperada, alcançando assim a satisfação máxima do investidor relacionada ao retorno  $\phi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  da carteira de investimento.

Para Markowitz, a escolha da carteira está diretamente relacionada a dois fatores importantes: o risco e o retorno. O retorno esperado da carteira  $E[\phi]$  é a média dos retornos esperados dos ativos e seu risco é mensurado pelo grau de volatilidade associado aos retornos esperados, ou seja, pela variância da carteira  $var[\phi]$ . A escolha da carteira está na determinação do vetor  $\vec{\alpha}$ . Desta forma o retorno esperado da carteira de investimento será:

$$E[\phi] = \sum_{i=1}^n \alpha_i E[x_i] = \alpha^T R.$$

Markowitz definiu o risco de uma carteira de investimentos como sendo:

$$var[\phi] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cov[x_i, x_j] \alpha_i \alpha_j = \alpha^T M_2 \alpha$$

onde  $M_2 = (cov(x_i, x_j))$  é a matriz de covariâncias entre os ativos, uma medida do grau de interdependência numérica entre as variáveis aleatórias.

Uma carteira de investimentos se apresenta bem equilibrada, quando é observada a diversificação, através da combinação de ativos que tendem a se mover em direções opostas, de tal forma que o risco global da carteira seja menor do que a soma dos riscos dos ativos isoladamente.

\*discente do curso de Mestrado em Ciências Computacionais

Supondo que o investidor busca maximizar o retorno de sua carteira a certo risco aceitável, ou minimizar o risco para um retorno desejado estabelecido, carteiras de investimento que apresentam este perfil são ditas carteiras eficientes.

Em Markowitz, o problema de seleção de carteiras de investimento é um problema de otimização quadrática que utiliza método de máximos e mínimos com restrições. Para o caso em que se deseja minimizar a variância da carteira de investimentos para um retorno desejado fixado, as restrições do problema serão: o retorno esperado da carteira fixado por um valor, e o somatório dos pesos de distribuição do investimento ser igual a 1.

De acordo com Athayde e Flores [1], desde Mandelbrot [3], os economistas sabem que a distribuição dos retornos de um ativo raramente segue o padrão de uma distribuição normal. A distribuição normal é inteiramente descrita por seus parâmetros de média e desvio padrão. Logo um modelo com base apenas em média e variância, pressupõe uma distribuição normal.

Desta forma, a abordagem de Markowitz para seleção de carteiras de investimento poderá não ter o alcance desejado. Sob essa perspectiva, o modelo de determinação de carteiras eficientes proposto por Athayde e Flores [1] incorpora momentos de ordem superior.

Com uma abordagem inovadora, Athayde e Flores apresentam uma nova perspectiva, incorporando ao modelo original a assimetria da carteira, o que torna os resultados mais consistentes. Ao considerar momentos de ordem superior, a utilidade esperada ainda é maximizada, incorporando agora o terceiro momento central, que corresponde à assimetria do retorno da carteira. Athayde e Flores [1] admitem que os momentos de ordem ímpar devem ser maximizados e os de ordem par, minimizados. O resultado de dualidade apresentado por Athayde e Flores [1] (Duality Lemma, p. 1338) garante que o problema de seleção de carteiras de investimentos para  $n$  ativos de risco e um livre de risco é equivalente à determinação de um portfólio de variância mínima dados um retorno esperado  $E(r_p)$  e uma assimetria  $\sigma_p^3$ . Tal portfólio é obtido pela minimização do Lagrangiano:

$$\min_{\alpha} L = \alpha^t M_2 \alpha + \lambda_1 [E(r_p) - (\alpha^t M_1 + (1 - \alpha^t \mathbf{1}) r_f)] + \lambda_2 (\sigma_p^3 - \alpha^t M_3 (\alpha \otimes \alpha)),$$

onde  $M_1, M_2$  e  $M_3$  denotam as matrizes contendo os retornos médios, as covariâncias e as assimetrias dos  $n$  ativos de risco e  $r_f$  denota a taxa de retorno do ativo livre de risco. Além disso,  $\mathbf{1}$  denota o vetor  $n \times 1$  formado por 1's,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de pesos para os ativos que compõem a carteira e  $\otimes$  denota o produto de Kronecker.

Em [1], Athayde e Flores indicam que a solução do problema de seleção de carteiras eficientes pode ser modelada via um problema de ponto fixo. O objetivo central do nosso projeto de pesquisa é precisar matematicamente, com a utilização de análise convexa, o uso de teoremas de ponto fixo na solução do problema de maximização da utilidade esperada associado a modelos de seleção de carteiras eficientes. Analisamos matematicamente o modelo proposto por Athayde e Flores para determinar carteiras eficientes para  $n$  ativos com risco e um livre de risco quando são considerados os três primeiros momentos.

**Palavras-chave:** *Carteira de Investimento, Momentos de Ordem Superior, Ponto Fixo*

## Referências

- [1] G.M. Athayde e R.G. Flores Jr., Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28 (2004) 1335-1352.
- [2] J.P. Aubin, "Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis", Springer, 1998.
- [3] B. Mandelbrot, The variation of certain speculative prices, *Journal of Business* 36 (1963) 394-419.
- [4] H. Markowitz, Portfolio Selection, *The Journal of Finance* 7 (1952) 77-91.