Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Derivadas e Medidas de Interatividade para Números Fuzzy

Diogo S. Silva[1] Roberto A. C. Prata[2]
DM/UFAM, Manaus, AM

A Matemática Fuzzy é uma área recente em matemática, surgida na segunda metade do século XX, no trabalho de Zadeh [10]. A ideia inicial se trata de expandir a noção de conjunto, permeada pela dicotomia entre pertencimento e não pertencimento. Assim, como uma forma de tratar formalmente de proposições e quantidades incertas, surge a noção de conjunto fuzzy. Um conjunto fuzzy, uma generalização de um conjunto clássico, ou crisp, é um conjunto com graus de pertencimento contínuos, modelando situações reais onde não temos um critério exato delimitando uma classe de objetos, além dos casos clássicos de pertencimento e não pertencimento [1].

Assim, um conjunto fuzzy φ_A é dado por uma função, sendo o domínio U um conjunto universo, o contradomínio o intervalo $[0, 1]$, e a imagem $\varphi_A(x)$ pela função o grau de pertinência, de forma que 0 indica não pertencimento, 1 indica pertencimento e os valores entre 0 e 1 indicam graus de pertencimento, de modo que quanto mais próxima de 1 é a imagem, maior é o grau de pertencimento. Se U é um espaço topológico, podemos definir os α-níveis de um subconjunto fuzzy A, para $\alpha \in [0, 1]$. Se $\alpha > 0$, então $[A]^\alpha$ é o conjunto de elementos $x \in U$ com $\varphi_A(x) \geq \alpha$, e se $\alpha = 0$, então $[A]^0$ é o fecho do conjunto de elementos $x \in U$ com $\varphi_A(x) > 0$. Um número fuzzy é um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}$ de modo que todos os seus α-níveis são intervalos compactos não vazios.

Mais especialmente, a noção de número fuzzy surge para generalizar a noção de número real, de forma semelhante. E aplicando o Princípio da Extensão de Zadeh, obtemos as operações entre números fuzzy, usando intervalos fechados de números reais [1]. No entanto, podemos ainda obter tais operações através de distribuições de possibilidades [4]. Mesmo quando tratamos de apenas uma entre as operações, a literatura já propõe diferentes formas de definir, por exemplo, diferenças entre números fuzzy, como: tradicional , via distribuições, de Hukuhara, generalizada de Hukuhara, generalizada e CIA [2].

Através da distribuição de possibilidades conjunta de dois números fuzzy, investigamos os números fuzzy interativos, que podem ser descritos como aqueles cujos valores são dados dependentemente um do outro [6]. Dentre esses, destacamos os números fuzzy f-correlacionados, cuja dependência se expressa de modo que os α-níveis de um são a imagem do outro por uma função f contínua, monótona e injetiva, utilizados, por exemplo, em modelos de evolução do HIV [3].

Já possuímos na literatura estudo sobre como somar números fuzzy interativos [4], em especial os completamente correlacionados, bem como estudos sobre a multiplicação de números fuzzy interativos [5]. As operações entre números fuzzy, especialmente a subtração, são conceitos fundamentais para o estudo de Derivadas Fuzzy, que são a base para o estudo de Equações Diferenciais Fuzzy, cujas aplicações incluem problemas de engenharia, biologia, economia, além de outras áreas que envolvam problemas de modelagem de conceitos cujas delimitações não são precisas [9].

Assim, propomos investigar algumas dentre as diferentes operações aritméticas entre números fuzzy estabelecidas na literatura, bem como as diferentes derivadas que podem ser definidas. Sendo o estudo da interatividade um elemento central neste meio, estudamos ainda as diferentes formas de medir a interatividade entre números fuzzy, dadas em [6–8]. Destarte, sejam f uma função de

[1]sampaiodiogo.dasilva@gmail.com
[2]praroberto@ufam.edu.br

pesagem; A e B números fuzzy, com distribuição de possibilidade conjunta C, e variáveis aleatórias X_α e Y_α de distribuição conjunta uniforme em $[C]^\alpha$, dado $\alpha \in [0,1]$; $\mathrm{Cov}(X_\alpha, Y_\alpha)$ covariância probabilística. Na tabela a seguir, apresentamos as medidas de interatividade por meio destes conceitos.

Tabela 1: Medidas de interatividade. Fonte: [6–8].

Medida de interatividade	Equação
Covariância f pesada	$\mathrm{Cov}_f(A,B) = \int_0^1 \frac{U_A(\alpha) - L_A(\alpha)}{2} \cdot \frac{U_B(\alpha) - L_B(\alpha)}{2} f(\alpha)\, d\alpha.$
Covariância f pesada interativa	$\mathrm{Cov}_f(A,B) = \int_0^1 \mathrm{Cov}(X_\alpha, Y_\alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$
Indíce de interatividade	$\rho_f(A,B) = \int_0^1 \frac{\mathrm{Cov}(X_\alpha, Y_\alpha)}{\sqrt{\mathrm{Cov}(X_\alpha, X_\alpha)}\sqrt{\mathrm{Cov}(Y_\alpha, Y_\alpha)}} f(\alpha)\, d\alpha.$

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] L. C. Barros e R. C. Bassanezi. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Instituto de Matemática, Estatística e Computação, 2010.

[2] L. C. Barros, F. S. Pedro e L. T. Gomes. "Diferenças entre números fuzzy". Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**. 2015, pp. 010067-1–7. DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0067.

[3] V. M. Cabral, R. A. C. Prata e L. C. Barros. "f-correlated fuzzy numbers applied to HIV model with protease inhibitor therapy". Em: **Mathware & soft computing: The Magazine of the European Society for Fuzzy Logic and Technology** 22.1 (2015), pp. 46–51.

[4] C. Carlsson, R. Fullér e P. Majlender. "Additions of completely correlated fuzzy numbers". Em: **2004 IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. 2004, pp. 535–539. DOI: 10.1109/FUZZY.2004.1375791.

[5] L. Coroianu e R. Fullér. "On multiplication of interactive fuzzy numbers". Em: **2013 IEEE 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)**. 2013, pp. 181–185. DOI: 10.1109/SISY.2013.6662566.

[6] R. Fullér e P. Majlender. "On interactive fuzzy numbers". Em: **Fuzzy Sets and Systems** 143 (2004), pp. 355–369. DOI: 10.1016/S0165-0114(03)00180-5.

[7] R. Fullér e P. Majlender. "On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers". Em: **Fuzzy Sets and Systems** 136.3 (2003), pp. 363–374. DOI: 10.1016/S0165-0114(02)00216-6.

[8] R. Fullér, J. Mezei e P. Várlaki. "An improved index of interactivity for fuzzy numbers". Em: **Fuzzy Sets and Systems** 165.1 (2011), pp. 50–60. DOI: 10.1016/j.fss.2010.06.001.

[9] L. T. Gomes, L. C. de Barros e B. Bede. **Fuzzy differential equations in various approaches**. Springer, 2015.

[10] L. A. Zadeh. "Fuzzy sets". Em: **Information and Control** 8.3 (1965), pp. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.