Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Abordagem Matemática para a Dinâmica da Contração Muscular no Modelo de Hill de Três Elementos

Lucas C. Teixeira[1]
Departamento de Física - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ
Wellington C. Jesus[2] Marina R. B. Dias[3]
Departamento de Matemática - ICEx - UFF, Volta Redonda, RJ

O uso de modelos simples do tipo Hill em simulações, em vez de modelos mais recentes, é bem justificado, uma vez que modelos computacionalmente menos custosos, embora menos precisos, do tipo Hill têm grande valor para simulações em grande escala [3]. O presente estudo é uma continuidade e ampliação da estrutura *MUSCLES*, uma ferramenta on-line de simulação computacional para o estudo da fisiologia muscular básica [2]. Mais especificamente, um modelo de 3 elementos de Hill é explorado, tendo por base que o músculo produz dois tipos de força, ativa e passiva, que se somam para compor a força total. Elementos não contráteis contribuem com sua força passiva. Tecnicamente, o elemento passivo de um músculo tem propriedades mais corretamente denominadas elásticas, mas pode ser modelado mais simplesmente como uma mola. Como esse elemento semelhante a uma mola se conecta em série com o elemento contrátil, pode-se pensar na força que o elemento contrátil produz como uma força ativa transmitida ao tecido muscular por meio de um elemento elástico em série. Os músculos, no entanto, também têm outro elemento elástico, chamado de elemento elástico paralelo, que também contribui para sua força passiva. Em 1922, A. V. Hill [1] notou pela primeira vez que músculos ativados produzem mais força quando mantidos isometricamente (ou seja, em um comprimento fixo) do que quando encurtam. Quando os músculos encurtam, eles parecem desperdiçar parte de sua força ativa para superar uma resistência inerente. Essa resistência não poderia resultar do elemento elástico em série porque ele resiste ao alongamento, não ao encurtamento. Ele descobriu que quanto mais rápido um músculo encurta, menos força total ele produz. Assumindo uma força ativa constante, Hill concluiu que o encurtamento mais rápido leva a uma força resistiva maior. Hill fez uma analogia entre a força resistiva de um pistão em um fluido viscoso, como um amortecedor. Se o pistão for empurrado, o amortecedor resistirá por uma tensão T (equivalente a uma força) que depende da viscosidade b do fluido em sua cavidade. Quanto mais rápido o pistão for empurrado, mais forte o fluido resistirá. Para uma dada velocidade $\dot{x}$, a força que você precisa para mover o pistão é $T = b\dot{x}$. Para explicar o fato de que o músculo produz menos força quando encurta, Hill propôs que esse elemento viscoso fica em paralelo com o elemento contrátil. Consequentemente, esse componente pode ser chamado de elemento elástico paralelo. Para investigar as propriedades desse elemento viscoso, Hill e seus colaboradores realizaram um experimento, eles prenderam um músculo a uma barra que girava em torno de um ponto. Uma extremidade da barra tinha um mecanismo de trava que eles podiam soltar a qualquer momento. Uma cesta segurava um peso na outra extremidade da barra. Quando Hill soltava a trava, esse peso puxaria o músculo por uma força T. O experimento começou com a fixação acionada e o músculo estimulado ao máximo. A estimulação resultou na produção de força T_0 no músculo. Como o músculo puxava uma barra que não podia se mover, a força que o músculo

[1]cordeiro_lucas@id.uff.br
[2]wellingtonjesus@id.uff.br
[3]marinaribeiro@id.uff.br

produzia não alterava o comprimento do músculo. Neste ponto, Hill e colaboradores soltaram a trava, o comprimento do músculo encurtou repentinamente e a força reduziu de T_0 para T. Após essa fase rápida de encurtamento o músculo continuou a encurtar, mas agora gradualmente. O fato de que o músculo encurtou imediatamente em quantidade Δx_1 e reduziu sua força de T_0 para T sugere que algo no músculo agiu como uma mola. Se a tensão é colocada em uma mola puxando-a e, em seguida, soltá-la repentinamente, a mola encurtará rapidamente. Esta mola é o elemento elástico em série (SE) mencionado acima e sua rigidez pode ser descrita por K_{SE}. Note-se que a rigidez relaciona mudanças na força (ou tensão F) a mudanças no comprimento (L): $K = \Delta F/\Delta L$. Enquanto uma parte do mecanismo do músculo mudou o comprimento rapidamente em resposta à mudança de força, outra parte não mudou tão rapidamente - como se um “amortecedor” agisse na ‘mola”, retardando sua resposta à mudança de força. O elemento elástico paralelo (PE), mencionado acima, representa esse segundo elemento passivo no músculo, e sua rigidez pode ser descrita por K_{PE}. A viscosidade do músculo, o elemento elástico paralelo e o elemento elástico em série compõem os componentes passivos de um músculo modelo elementar. O comprimento do elemento elástico em série, denominado por x_1, e o comprimento do elemento elástico paralelo, denominado por x_2. Observe que este é um modelo de um músculo, isso não implica que os vários componentes tenham esse arranjo físico dentro de um músculo. Além disso, o componente viscoso da tensão muscular resulta de mecanismos muito diferentes do amortecedor mecânico, acima mencionado. Matematicamente, no entanto, as características do músculo concordam razoavelmente bem com esta representação. Pode-se pensar no modelo como uma comparação. No modelo, como em um músculo, quando a tensão no sistema diminui repentinamente, o elemento elástico em série responde imediatamente, mas o elemento elástico paralelo responde gradualmente por causa de seu componente viscoso. O componente ativo do músculo contribui com a parte final do modelo matemático do músculo. Essa força ativa atua contra os componentes passivos do modelo (e músculos) para produzir a força final que atua na barra do experimento, acima mencionado. A função A indica o componente ativo. O modelo agora pode descrever como a força total produzida pelo músculo depende de seus componentes passivos e ativos. Suponha que o elemento elástico em série - seu componente mais parecido com uma mola - tenha um comprimento de repouso $\bar{x}_1$ e a mola elástica paralela tenha um comprimento de repouso $\bar{x}_2$. A mesma força T se desenvolve em ambos os elementos porque o músculo pode ter apenas uma força em qualquer dado momento. Assim, $T = K_{SE}(x_1 - \bar{x}_1)$ e $T = K_{PE}(x_2 - \bar{x}_2) + b\dot{x}_2 + A$. Dado que o comprimento total do músculo deve ser a soma dos comprimentos dos elementos elásticos em série e elásticos paralelos temos: $x - \bar{x} = (x_1 - \bar{x}_1) + (x_2 - \bar{x}_2)$ e associando com a relação entre a força muscular, o comprimento do músculo, a taxa de variação da força em relação ao tempo $\dot{T}$ temos um modelo de um músculo típico:

$$\dot{T} = \frac{K_{SE}}{b}\left[K_{PE}(x - \bar{x}) + b\dot{x} - \left(1 + \frac{K_{PE}}{K_{SE}}\right)T + A\right]. \tag{1}$$

Referências

[1] A. V. Hill. **First and last experiments in muscle mechanics**. 1a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1970. ISBN: 9780521076647.

[2] L. C. Teixeira, W. C. Jesus, M. R. B. Dias e S. A. S. Lustosa. “Uma estrutura interativa para o ensino do modelo de contração muscular de Hill”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 11.1 (2025), pp. 1–2. ISSN: 2359-0793.

[3] S. Yeo, J. Verheul, W. Herzog e S. Sueda. “Numerical instability of Hill-type muscle models”. Em: **Journal of The Royal Society Interface** 20.199 (2023), p. 20220430. DOI: `10.1098/rsif.2022.0430`.