Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Núcleo de EDO's Aplicado no Cálculo Fracionário

Tiago F. C. Santos[1] Sandro R. Mazorche[2]
UFJF, Juiz de Fora, JF

O cálculo fracionário é uma área relativamente recente da matemática, e que vem ganhando destaque nas últimas décadas. Um dos principais interesses nesse tema de estudo é a aplicação de derivadas fracionárias em equações e modelos matemáticos, com o objetivo de ampliar as possibilidades de interpretações e soluções do problema, como em [2]. Ao fracionalizar um modelo, é comum substituir a derivada clássica por uma derivada fracionária, e utilizar a sua ordem como um parâmetro. Neste trabalho, apresentaremos uma forma construtiva de obter uma equação fracionária, proposta por [1], e que nos leva a definição de um novo operador fracionário. Para isso, trataremos da seguinte EDO:

$$\begin{cases} y'(t) = -ry(t) + g(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff y(t) = \int_0^t e^{-r(t-\tau)} g(\tau) d\tau + y_0 e^{-rt} \tag{1}$$

Nesse problema, chamaremos a função e^{-rt} de *núcleo da equação*. Caso alterássemos o núcleo, a EDO também seria alterada. Nosso objetivo então é escolher uma função $K(t)$ que ao ser considerada como o novo núcleo irá definir uma equação fracionária. Dessa forma, consideramos:

$$K(t) = e^{-r_2 t} E_\alpha(-r_1^\alpha t^\alpha), \quad \text{onde} \quad r_1 + r_2 = 1, \quad r_1, r_2 \geq 0, \quad \text{e} \quad E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \tag{2}$$

$E_\alpha(z)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro, conhecida como a generalização da função exponencial. Este núcleo é composto por $e^{-r_2 t}$ e $E_\alpha(-r_1^\alpha t^\alpha)$, que trazem dois novos parâmetros para a equação, α e $r_1 = 1 - r_2$. Dessa forma, com a solução $y(t) = \int_0^t K(t-\tau) g(\tau) d\tau + y_0 K(t)$, podemos estabelecer uma nova equação fracionária, dada por:

$$y'(t) = g(t) - {}^*D^\alpha[y(t)], \qquad {}^*D^\alpha[y(t)] := r_2 y(t) + r_1^\alpha e^{-r_2 t}\, {}^{RL}D^{1-\alpha}\left[e^{r_2 t} y(t)\right]. \tag{3}$$

Sendo ${}^{RL}D^{1-\alpha}[y(t)]$ a derivada de Riemann-Liouville, definida como:

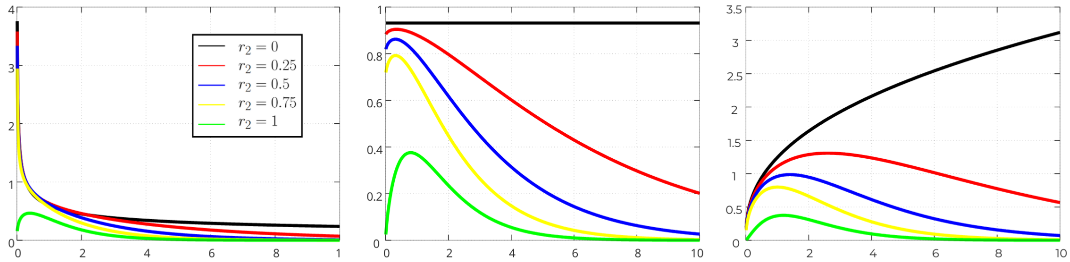
$$ {}^{RL}D^{1-\alpha}[y(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau. \tag{4}$$

O operador ${}^*D^\alpha$ é interessante do ponto de vista de aplicação em modelos, uma vez que a forma de obtê-lo é construtiva a partir do núcleo da equação. Ele pode ser interpretado como uma soma ponderada entre a função e a sua derivada de Riemann-Liouville com peso exponencial, que varia entre o caso clássico e o fracionário ao alterar o valor de r_1. Por conta disso, estudamos algumas de suas propriedades em funções fundamentais. Como exemplo, utilizamos a função $h(t) = e^{-r_2 t} t^\mu$, obtendo:

$$ {}^*D^\alpha[h(t)] = e^{-r_2 t} \left(r_2 t^\mu + r_1^\alpha \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha)} t^{\mu-1+\alpha} \right) \tag{5}$$

[1]tiago.santos@estudante.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.br

Além de possuir um decaimento exponencial para $r_2 \neq 0$, o comportamento da função (5) próximo a $t = 0$ pode ser dividido em três casos, dependendo da relação entre μ e α. No primeiro caso, representado na figura 1(a), em que $\mu < 1-\alpha$, $h(t)$ não está definida para $t = 0$. Essa propriedade ocorre quando aplicamos a derivada de Riemann-Liouville em funções que não convergem para 0 com ordem maior ou igual a $1-\alpha$ quando $t \to 0$, o que pode causar dificuldades ao resolver problemas numéricos. Um exemplo importante desse caso é o das funções constantes não nulas, nas quais a derivada de Riemann-Liouville não se anula. Para $\mu = 1-\alpha$, temos $h(0) = r_1^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)$, logo a função possui um valor inicial bem definido, como na figura 1(b). E quando $\mu > 1-\alpha$, tem-se $h(0) = 0$, caso da figura 1(c). Essas características podem surgir ao trabalhar com soluções de equações diferenciais, e permitir uma melhor compreensão do modelo que está sendo estudado.



(a) $\mu = 0.4 < 1-\alpha$ (b) $\mu = 0.8 = 1-\alpha$ (c) $\mu = 1.2 > 1-\alpha$

Figura 1: Gráficos da função $h(t)$ utilizando $\alpha = 0.2$. Fonte: dos autores.

A utilização do operador fracionário em equações diferenciais abre diversas possibilidades de estudos em modelos do ponto de vista do cálculo fracionário, com o conceito de efeito memória podendo ser melhor explorado nesses casos, e como as interpretações físicas serão afetadas. Com os resultados observados neste trabalho, pretendemos estudar o comportamento de tal operador em modelos já conhecidos, e com isso compreender melhor as propriedades de ${}^{*}D^{\alpha}$.

Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Referências

[1] N. Z. Monteiro, R. W. Dos Santos e S. R. Mazorche. "Bridging the gap between models based on ordinary, delayed, and fractional differentials equations through integral kernels". Em: **Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.** 19 (2024), pp. 1–11. DOI: 10.1073/pnas.2322424121.

[2] N. Z. Monteiro, R. W. Dos Santos e S. R. Mazorche. "Constructive fractional models through Mittag-Leffler functions". Em: **Computational and Applied Mathematics** 177 (2024), pp. 1–26. DOI: 10.1007/s40314-024-02680-z.

