Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Efeitos do Ruído Multiplicativo em Sistemas Dinâmicos Biestáveis

Sara C. Q. Valente[1], Rodrigo C. L. Bruni[2]
PPG-CompMat/UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Daniel G. Barci[3]
IF/UERJ, Rio de Janeiro, RJ
Zochil G. Arenas[4]
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Muitos sistemas dinâmicos apresentam múltiplos estados de equilíbrio separados por barreiras de potencial, nas quais a ativação térmica pode promover transições entre eles. Um modelo clássico para descrever esse fenômeno consiste em uma partícula sujeita a um potencial biestável $U(x)$, cuja dinâmica é governada pela equação de Langevin com ruído branco aditivo. A taxa de escape, também conhecida como taxa de Kramers, quantifica a transição entre os mínimos do potencial e constitui um parâmetro essencial na dinâmica do sistema.

Para potenciais simétricos e no regime de ruído fraco, *i.e.* $\sigma^2 \ll \Delta U$, a taxa de Kramers é dada por [4]:

$$r_{add} = \frac{\sqrt{\omega_{min}|\omega_{max}|}}{2\pi} e^{-\frac{\Delta U}{\sigma^2}} , \tag{1}$$

onde a altura da barreira é dada por $\Delta U = U(x_{max}) - U(x_{min})$, com x_{max} e x_{min} correspondendo, respectivamente, às posições do máximo e mínimo do potencial. A intensidade do ruído é dada por σ^2 e as curvaturas locais nos mínimos e máximos do potencial são ω_{min} e ω_{max}, respectivamente.

Extensões recentes da equação (1) para sistemas com ruído multiplicativo [6] consideram uma função de difusão dependente do estado. Nesse contexto, a escolha da prescrição estocástica é crucial, pois afeta diretamente a dinâmica do sistema [3] e pode influenciar fenômenos físicos importantes, como a ressonância estocástica [2].

Embora a taxa de Kramers tenha sido amplamente estudada para potenciais simétricos, sistemas reais frequentemente apresentam potenciais assimétricos, o que introduz novos desafios na descrição da dinâmica de escape. Neste trabalho, propomos uma formulação analítica para a taxa de escape em sistemas com ruído multiplicativo e potenciais assimétricos [7], dada por:

$$r = \frac{g(x_m)^2}{2} \left(\frac{\sqrt{\tilde{\omega}_a|\tilde{\omega}_m|}}{2\pi} \, e^{-\frac{\Delta U^a_{eq}}{\sigma^2}} + \frac{\sqrt{\tilde{\omega}_b|\tilde{\omega}_m|}}{2\pi} \, e^{-\frac{\Delta U^b_{eq}}{\sigma^2}} \right), \tag{2}$$

onde a altura da barreira do potencial de equilíbrio associada aos mínimos $x = a$ e $x = b$ é ΔU^a_{eq} e ΔU^b_{eq}. As curvaturas locais correspondentes são $\tilde{\omega}_a$ e $\tilde{\omega}_b$, enquanto a curvatura local associada ao máximo e a função de difusão correspondente são denotadas por $\tilde{\omega}_m$ e $g(x_m)$, respectivamente.

A expressão (2) destaca a contribuição simultânea de ambos os mínimos locais para a taxa de Kramers. Ela foi obtida a partir do cálculo das probabilidades condicionais de transição entre estados metaestáveis, utilizando técnicas de integrais de caminho e expansão instanton-anti-instanton, válidas no regime de ruído fraco e tempos longos.

[1]saravalenteq@gmail.com
[2]bruni.r.c.l@gmail.com
[3]daniel.barci@gmail.com
[4]zochil@ime.uerj.br

A dinâmica do sistema foi simulada utilizando o método de Euler-Maruyama [1] para a equação de Langevin na prescrição de Itô [5]:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}g^2(x)\frac{dU(x)}{dx} + \sigma^2\alpha g(x)g'(x) + g(x)\eta(t), \tag{3}$$

com $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + px$ e $g(x) = 1 + \lambda x^2$, onde $0 < \lambda < 1$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, sendo consideradas 8×10^4 trajetórias estocásticas.

Com o auxílio das simulações, calculou-se a média de x, verificando-se sua rápida convergência para o valor de equilíbrio. Verificou-se também a dependência da taxa de decaimento de acordo com diferentes prescrições estocásticas (Itô, Stratonovich e cinética) bem como a boa concordância entre previsões teóricas e dados simulados, independentemente do ruído ou da prescrição. Os resultados não apenas generalizam a taxa de Kramers para potenciais assimétricos, ampliando sua aplicabilidade a sistemas reais, mas também destacam a relevância do potencial de equilíbrio $U_{eq}(x)$ na dinâmica estocástica. Além disso, evidenciam a influência das prescrições estocásticas em observáveis como as taxas de decaimento.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] M. Bayram, T. Partal e G. O. Buyukoz. "Numerical methods for simulation of stochastic differential equations". Em: **Advances in Difference Equations** 2018 (2018), pp. 1–10. DOI: 10.1186/s13662-018-1612-5.

[2] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung e F. Marchesoni. "Stochastic resonance". Em: **Reviews of Modern Physics** 70.1 (1998), pp. 223–287. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223.

[3] P. Hänggi e H. Thomas. "Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response". Em: **Physics Reports** 88.4 (1982), pp. 207–319. ISSN: 0370-1573.

[4] H. A. Kramers. "Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions". Em: **physica** 7.4 (1940), pp. 284–304. DOI: 10.1016/S0031-8914(40)90098-2.

[5] M. V. Moreno, D. G. Barci e Z. G. Arenas. "Conditional probabilities in multiplicative noise processes". Em: **Physical Review E** 99.3 (2019), p. 032125. DOI: 10.1103/PhysRevE.99.032125.

[6] M. V. Moreno, D. G. Barci e Z. G. Arenas. "State-dependent diffusion in a bistable potential: Conditional probabilities and escape rates". Em: **Physical Review E** 101.6 (2020), p. 062110. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.062110.

[7] S. C. Q. Valente, R. da C. L. Bruni, Z. G. Arenas e D. G. Barci. "Effects of Multiplicative Noise in Bistable Dynamical Systems". Em: **Entropy** 27.2 (2025), p. 155. DOI: 10.3390/e27020155.

