Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Oscilador Harmônico Fracionário via Transformada de Laplace

Daniela dos S. de Oliveira * **E. Capelas de Oliveira**
Departamento de Matemática Aplicada
Imecc - Unicamp
13083-859, Campinas, SP
E-mail: ra142310@ime.unicamp.br, capelas@ime.unicamp.br

RESUMO

O cálculo de ordem não inteira, popularmente conhecido como cálculo fracionário, pode ser visto como uma generalização da diferenciação e integração usuais, isto é, a passagem de ordem inteira para ordem não inteira, ou mesmo complexa.
Este trabalho tem por objetivo discutir e resolver uma equação diferencial fracionária, em particular, a equação diferencial que generaliza o problema do oscilador harmônico clássico.

1 Derivada fracionária segundo Caputo

A equação diferencial fracionária do oscilador harmônico é, [4]

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega^2 x(t) = 0,$$

com $\omega^2 = \frac{k}{m}$, onde k é uma constante, m a massa, α um parâmetro e satisfazendo as seguintes condições iniciais

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = 0.$$

Consideramos o parâmetro $1 < \alpha \leq 2$, de modo que, no caso em que $\alpha = 2$ recuperamos a solução do oscilador harmônico clássico. A derivada de ordem α é uma derivada no sentido de Caputo, [1].

Definição 1.1. A derivada fracionária de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, no sentido de Caputo, à esquerda, é definida por

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a J_t^{n-\alpha} D^n f(t)$$

com $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$, onde $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ significa a parte inteira de $\mathrm{Re}(\alpha)$, ou seja,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) \;=\; {}_* D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{D^n[f(u)]}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{a} \in \mathbb{R}$$

onde $D^n[f(u)] = \frac{d^n f(u)}{du^n}$ é a derivada n de ordem inteira e $J^{n-\alpha}$ é a integral de ordem fracionária.

2 Funções de Mittag-Leffler

Assim como a função exponencial é solução de equações diferenciais com coeficientes constantes, a função de Mittag-Leffler, por ser uma generalização da função exponencial, é solução de equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes. A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é definida da seguinte maneira, [2, 3].

*Bolsista de Mestrado CAPES.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0207

Definição 2.1. A função de Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por $E_\alpha(z)$, conforme introduzida por Mittag-Leffler é uma função complexa que depende de um parâmetro complexo, α, onde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, na forma de uma série

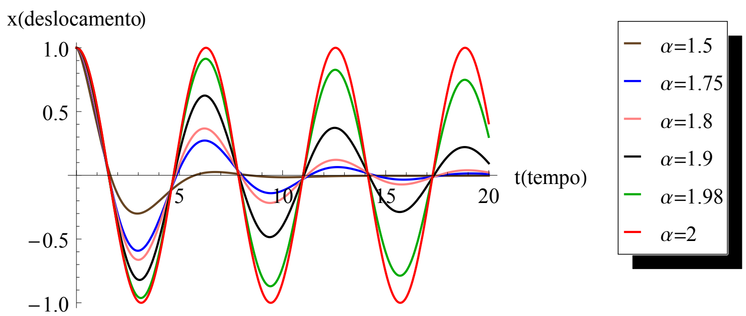
$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}.$$

3 Oscilador harmônico fracionário

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial fracionária do oscilador harmônico e utilizando as condições iniciais, temos que a solução é dada por

$$x(t) = x_0 E_\alpha(-\omega^2 t^\alpha)$$

cuja representação gráfica é, para diferentes valores do parâmetro α



4 Conclusão

Utilizando a metodologia da transformada de Laplace resolveu-se a equação diferencial fracionária que descreve o problema do oscilador harmônico fracionário, uma generalização do caso clássico. Para melhor visualização da solução esboçamos um gráfico para distintos valores do parâmetro associado à ordem da derivada. No particular caso em que este parâmetro é igual a 2 recuperamos o caso do oscilador harmônico clássico.

Palavras-chave: *Cálculo fracionário, Derivada de Caputo, Oscilador harmônico fracionário*

Referências

[1] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira, A. O. Chiacchio, “Sobre a Função de Mittag-Leffler”, Relatório de Pesquisa 15/06, IMECC-Unicamp, 2006.

[2] M. G. Mittag-Leffler, “Sur la Nouvelle Fonction $E_\alpha(x)$”, C. R. Acad. Sci., **137**, 554-558, 1903.

[3] D. S. Oliveira, “Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler”, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, julho de 2014.

[4] D. C. Rosendo, “Sobre a Função de Mittag-Leffler”', Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2008.

