Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação entre Vetorização e Laços Explícitos na Solução de EDPs por Elementos Finitos em Julia

Daniel S. da Silva[1]
IC/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ
Leonardo V. A. Filho[2] Bruno A. do Carmo[3] Marcello G. Texeira[4]
PPGI/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ

Eficiência é uma das métricas mais relevantes na avaliação de implementações de algoritmos. Geralmente, em métodos numéricos, há uma relação direta entre alta precisão e alto custo computacional. Diante disso, explorar novas abordagens que conciliem esses dois aspectos é extremamente importante.

Tendo em vista o tempo de execução e o consumo de memória, uma análise comparativa foi feita entre uma abordagem vetorizada e uma abordagem com laços explícitos na implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em Julia. A vetorização é uma abordagem utilizada na implementação de algoritmos que processa operações em blocos de dados, diferente do que comumente é feito com laços explícitos (tais como "*for*" e "*while*") [2].

A formulação forte da Equação Diferencial Parcial (EDP) de interesse é descrita por: dadas funções $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determine $u : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_x(x,t) + u(x,t) + g(u(x,t)) = f(x,t), & \forall (x,t) \in]0,1[\times[0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t \in [0,1], \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall x \in]0,1[. \end{cases} \tag{1}$$

O MEF é aplicado na dimensão espacial considerando a discretização uniforme $x_i = ih$, para $i = 0, \ldots, n_e - 1$, sendo n_e o número de elementos finitos e h o comprimento de cada elemento. O método de Crank-Nicolson linearizado é aplicado na dimensão temporal com passo τ constante e discretização uniforme $t_n = n\tau$, $n = 1, \ldots, N$, levando em conta que $t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2}$. Desse modo, o problema em (1) é transformado em (2), obtendo-se o seguinte Sistema Linear Iterativo:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau} M(C^{(n)} - C^{(n-1)}) + \dfrac{1}{2} K(C^{(n)} + C^{(n-1)}) = F^{(n-\frac{1}{2})} - G(\frac{3C^{(n-1)} - C^{(n-2)}}{2}), \\ C^{(0)} = \left[u_0(x_1),\, u_0(x_2),\, \ldots,\, u_0(x_{n_e-1})\right]^T, \end{cases} \tag{2}$$

em que, para todo $i,\ j = 1, \ldots, n_e - 1$ e $n = 1, \ldots, N$,

$$M_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \qquad K_{ij} = \int_a^b \Big(\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\frac{d\varphi_j(x)}{dx} + \varphi_i(x)\frac{d\varphi_j(x)}{dx} + \varphi_i(x)\varphi_j(x) \Big)\,dx,$$

$$F_i^{(n-\frac{1}{2})} = \int_a^b \varphi_i(x) f(x, t_{n-\frac{1}{2}})\,dx, \qquad G_i(\tfrac{3C^{(n-1)} - C^{(n-2)}}{2}) = \int_a^b \varphi_i(x)\, g(\tfrac{3U^{(n-1)}(x) - U^{(n-2)}(x)}{2})\,dx.$$

[1]danielss@ic.ufrj.br
[2]leonardovaf@ic.ufrj.br
[3]bruno.carmo@ppgi.ufrj.br
[4]marcellogt@ic.ufrj.br

 © 2026 SBMAC

A função de interesse $u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-t}/\pi^2$ é aproximada por $U^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^{n_e-1} C_j^{(n)}\varphi_j(x)$, sendo $\varphi_j(x)$ funções lineares por partes [1]. Os experimentos adotaram $\tau = 2^{-15}$, $N = 1/\tau$, $h = 1/n_e$ e $g(s) = s^3 - s$. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 1 e 2 a seguir: as estatísticas na primeira correspondem a 5000 amostras e na segunda correspondem a 50 amostras.

Tabela 1: Estatísticas de tempo e alocação na *Heap* durante a construção das estruturas.

		Tempo (μs)			
n_e	Estrutura	Melhor	Pior	Médio	*Heap* (MiB)
2^5	K (Vet.)	$700 \cdot 10^{-6}$	18	$2 \pm (950 \cdot 10^{-3})$	$9 \cdot 2^{-10}$
	K	$691 \cdot 10^{-3}$	6	$(896 \pm 171) \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 2^{-10}$
	F (Vet.)	3	14	$3 \pm (241 \cdot 10^{-3})$	$144 \cdot 2^{-20}$
	F	3	11	3 ± 1	0
	G (Vet.)	$260 \cdot 10^{-3}$	5	$(274 \pm 78) \cdot 10^{-3}$	0
	G	$167 \cdot 10^{-3}$	$974 \cdot 10^{-3}$	$(248 \pm 73) \cdot 10^{-3}$	0
2^{10}	K (Vet.)	20	1318	34 ± 57	$265 \cdot 2^{-10}$
	K	19	1938	33 ± 56	$232 \cdot 2^{-10}$
	F (Vet.)	79	134	80 ± 2	$144 \cdot 2^{-20}$
	F	90	183	91 ± 4	0
	G (Vet.)	5	13	5 ± 1	0
	G	5	16	5 ± 1	0
2^{15}	K (Vet.)	728	2990	1002 ± 246	8
	K	612	2858	811 ± 199	7
	F (Vet.)	2545	5069	2599 ± 49	$144 \cdot 2^{-20}$
	F	2891	5014	2970 ± 231	0
	G (Vet.)	180	311	182 ± 4	0
	G	152	342	155 ± 14	0

Tabela 2: Estatísticas de tempo e alocação na *Heap* durante a resolução do sistema linear.

		Tempo (μs)			
n_e	Abordagem	Melhor	Pior	Médio	*Heap* (MiB)
2^5	Vetorizada	$133 \cdot 10^3$	$151 \cdot 10^3$	$(138 \pm 3) \cdot 10^3$	44
	Laços Explícitos	$119 \cdot 10^3$	$132 \cdot 10^3$	$(123 \pm 3) \cdot 10^3$	38
2^{10}	Vetorizada	$3304 \cdot 10^3$	$3482 \cdot 10^3$	$(3350 \pm 34) \cdot 10^3$	2^{10}
	Laços Explícitos	$3654 \cdot 10^3$	$3913 \cdot 10^3$	$(3686 \pm 51) \cdot 10^3$	2^{10}
2^{15}	Vetorizada	$106 \cdot 10^6$	$108 \cdot 10^6$	$107 \cdot 10^6 \pm 256 \cdot 10^3$	$32 \cdot 2^{10}$
	Laços Explícitos	$116 \cdot 10^6$	$119 \cdot 10^6$	$117 \cdot 10^6 \pm 827 \cdot 10^3$	$32 \cdot 2^{10}$

À medida que o número de elementos n_e aumenta, a abordagem vetorizada se torna mais vantajosa em termos de tempo para resolver o sistema linear, devido à construção do vetor F.

Referências

[1] M. A. Rincon e I-S. Liu. **Introdução ao Método de Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática - UFRJ, 2020. ISBN: 978-65-86502-00-8.

[2] The Julia Developers. **The Julia Programming Language Documentation**. Online. Acessado em 15/02/2025, `https://docs.julialang.org/`.

© 2026 SBMAC