

Implementação da Técnica de Separação de Variáveis para Equações Diferenciais Parciais via SageMath

Miguel L. A. De Carvalho¹, Rogério T. Cavalcanti²
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

O presente projeto propõe o desenvolvimento de um módulo computacional para o sistema SageMath [6], com o objetivo de implementar a técnica de separação de variáveis aplicada a equações diferenciais parciais (EDP) [1–4]. O SageMath é um ambiente de computação algébrica moderno, gratuito e de código aberto, cujo propósito é oferecer uma alternativa viável a pacotes comerciais como Maple, Magma, Mathematica e Matlab [5]. Integrando aproximadamente cem pacotes de software livre sob uma interface unificada, o SageMath oferece uma ampla variedade de ferramentas para a pesquisa e o ensino em matemática pura e aplicada, física, engenharias e áreas correlatas.

Estamos interessados em equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. Uma equação desse tipo, em duas variáveis, pode ser expressa em sua forma geral como

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y) \quad (1)$$

onde $u = u(x, y)$ é a função a ser determinada e os coeficientes A, B, C, D, E, F, G são funções conhecidas. A técnica de separação de variáveis consiste em buscar soluções u que admitam a forma de produto de funções de uma única variável, isto é, $u(x, y) = X(x)Y(y)$. A substituição dessa hipótese na equação original, seguida de manipulação algébrica, permite, quando possível, a separação dos termos dependentes de x e de y . Disso resultam equações diferenciais ordinárias independentes e que podem ser tratadas isoladamente. Como exemplo simples, considere a equação de Laplace em duas variáveis: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, definida no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, com condições de contorno apropriadas. Substituindo $u(x, y) = X(x)Y(y)$ na equação, obtém-se $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Dividindo ambos os lados por $X(x)Y(y)$, chega-se a $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$. Como o primeiro termo depende apenas de x e o segundo apenas de y , ambos devem ser constantes, de modo que $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$ e $\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$, para algum valor de separação $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, a equação original reduz-se a duas equações diferenciais ordinárias independentes $X''(x) - \lambda X(x) = 0$, e $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$.

Embora a separação de variáveis seja uma técnica clássica e amplamente empregada na resolução de EDP, observa-se a ausência de uma implementação robusta dessa técnica no SageMath e nos sistemas que o compõem. Atualmente, existe apenas uma funcionalidade restrita na biblioteca Sympy [7], capaz de tratar apenas casos mais simples de separação. Diante disso, no presente projeto buscamos desenvolver uma solução computacional robusta e extensível que permita automatizar, de forma simbólica, a separação de variáveis em EDP. Contribuindo assim para o ecossistema de softwares livres científicos.

A metodologia adotada no projeto baseia-se no desenvolvimento de algoritmos de manipulação simbólica capazes de automatizar as etapas fundamentais da técnica de separação de variáveis. O desenvolvimento seguirá uma arquitetura modular, permitindo a implementação independente de

¹alvescarvalho.miguel403@gmail.com

²rogerio.cavalcanti@ime.uerj.br

cada etapa. Essa abordagem visa garantir a flexibilidade e facilitar a futura integração do módulo com outras ferramentas de análise simbólica e métodos numéricos disponíveis no SageMath.

Serão priorizados a eficiência algorítmica, a clareza do código e a aderência aos padrões estabelecidos pelo projeto SageMath, incluindo documentação técnica detalhada.

Até o presente momento, foi concluída uma análise crítica das funcionalidades existentes no SageMath e nas bibliotecas integradas, em particular a Sympy, no que concerne à separação de variáveis em EDP. Essa análise confirmou a limitação dos algoritmos atuais. O estudante também se familiarizou com as técnicas de manipulação simbólica presentes no SageMath.

Paralelamente, iniciou-se também a implementação de protótipos dos algoritmos de verificação de separabilidade, aplicados inicialmente a EDP clássicas e bem conhecidas. Os testes preliminares indicam resultados consistentes, evidenciando a viabilidade da abordagem proposta. As próximas etapas incluem o aprimoramento dos algoritmos desenvolvidos, a ampliação da base de testes e a adaptação do código para conformidade plena com as diretrizes de contribuição ao repositório oficial do SageMath.

Referências

- [1] G. Arfken e H. Weber. **Física Matemática - Métodos Matemáticos para Engenharia e Física**. 6a. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. ISBN: 9788535220506.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima e D. B. Meade. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11a. ed. LTC, 2020. ISBN: 9788521636946.
- [3] D. G. De Figueiredo. **Análise De Fourier E Equações Diferenciais Parciais**. 1a. ed. Projeto Euclides, 2000. ISBN: 9788524401206.
- [4] P. J. Olver. **Introduction to Partial Differential Equations**. 1a. ed. Springer, 2013. ISBN: 9783319020983.
- [5] The Sage Developers. **SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 10.3)**. <https://www.sagemath.org>. 2024.
- [6] SageMath. **Documentação oficial do SageMath**. Online. Acessado em 12/03/2025, <https://doc.sagemath.org/html/en/index.html>.
- [7] Sympy. **Documentação oficial do SymPy**. Online. Acessado em 12/03/2025, <https://docs.sympy.org/latest/modules/solvers/pde.html#user-functions>.