Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Um Estudo do Autovetor Associado ao Raio Espectral da Matriz A_α como uma Medida de Centralidade de Grafos

Matheus P. Iozzi[1], Carla S. Oliveira[2]
ENCE/IBGE, Rio de Janeiro, RJ

Redes são sistemas tecnológicos, físicos, biológicos ou sociais caracterizados por um conjunto grande de entidades bem definidas que interagem dinamicamente entre si, como por exemplo: Internet e a Web. As redes físicas incluem, por exemplo, as redes de distribuição de energia e de água, as redes de transporte; as redes sociais podem ser vistas como redes de relacionamento pessoal/profissional, de comunidades, de pesquisadores, de publicações e as redes biológicas como cadeias alimentares e de transmissão de doenças. Por isso, compreender as suas estruturas, comunidades, funções, interações e propriedades torna-se de fundamental importância para se pensar como pode se manter a funcionalidade dessas redes. Por isso, o interesse da comunidade científica com relação ao estudo e a modelagem de redes vem aumentando significativamente nos últimos anos. A estrutura de uma rede pode ser modelada por um grafo, [1]. Um grafo é um par $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito cujos elementos são denominados vértices e $E(G)$ é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de $V(G)$, cujos elementos são denominados de arestas. O grafo G é de ordem n quando $|V(G)| = n$. Quando os vértices e as arestas de uma rede têm um significado que coincide com a nossa realidade denominamos esta rede de rede complexa. Atualmente, existem diversos problemas envolvendo redes complexas e dentre eles podemos destacar a determinação dos elementos mais importantes da rede, utilizando, por exemplo, as medidas de centralidade, como Autovetor (Eigenvector), Informação (Degree), Proximidade (Closeness), Intermediação (Betweenness), Intermediação de Fluxo (Flow Betweenness), [2], [3], [4] e [7].

Convém observar que grafos podem ser representados por várias matrizes de ordem n como por exemplo: Matriz de adjacência, $A(G) = [a_{ij}]$, onde $a_{ij} = 1$ se existe uma aresta entre os vértices v_i e v_j, e caso contrário $a_{ij} = 0$; e a matriz diagonal dos graus $D(G) = [d_{ii}] = [d(v_i)]$, onde $d(v_i)$ representa quantas arestas incidem no vértice v_i. Em 2017, Nikiforov [6] definiu a matriz A_α de um grafo como sendo uma combinação linear convexa entre sua matriz de adjacência e sua matriz dos graus da seguinte maneira:

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1 - \alpha)A(G), \tag{1}$$

Onde $\alpha \in [0, 1]$. Essa matriz pode sustentar o estudo espectral(via autovalores) das matrizes de adjacência e de graus de um grafo pois $A_0(G) = A(G)$ e $A_1(G) = D(G)$.

[1] matheusiozzi@outlook.com
[2] carla.oliveira@ibge.gov.br

Considerando a matriz de adjacência, $A(G)$, e $\lambda(A(G))$ o maior autovalor associado a esta matriz, as soluções não nulas da equação:

$$A(G)x = \lambda(A(G))x \tag{2}$$

São denominadas de autovetores de $A(G)$ associados ao autovalor $\lambda(A(G))$. De acordo com Horn *et. al* [5], existe um autovetor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associado a $\lambda(A(G))$ cujas coordenadas são todas positivas. A Medida de Centralidade de Autovetor de um vértice v_i do grafo G, denotada por $C_E(v_i)$, é definida por x_i. Quanto maior for o valor de x_i, maior é a influência do vértice v_i na rede que é modelada pelo grafo G e consequentemente mais central é o vértice em relação aos outros. Já a Medida de Centralidade de Informação (Grau) do vértice v_i, denotada por $C_D(v_i)$, é dada em função da quantidade de vértices que está diretamente ligada a ele, ou seja, $C_D(v_i) = d(v_i)$. Como $d(v_i)$ é dado pelo somatório da i- ésima linha da matriz de adjacência, temos que $C_D(v_i)$ pode ser reescrito da seguinte maneira: $C_D(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$. O vértice mais central de acordo com esta medida é o que possui maior valor de $C_D(v_i)$, visto que ela mede o efeito imediato ou a influência imediata de um vértice em relação aos demais.

Neste trabalho, introduzimos uma nova medida espectral de centralidade, denominada de A_α-autovetor, baseada no autovetor $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ associado ao maior autovalor da matriz $A_\alpha(G)$, $\lambda(A_\alpha(G))$. A Medida de Centralidade de A_α-autovetor de um vértice v_i do grafo G, denotada por $C_{\alpha\text{-eig}}(v_i)$, é definida da seguinte maneira:

$$C_{\alpha\text{-eig}}(v_i) = \frac{1}{\lambda\big(A_\alpha(G)\big)} \left(\alpha d(v_i) + (1-\alpha) \sum_{\{v_j, v_i\} \in E(G)} \overline{x}_j \right). \tag{3}$$

Esta Medida de Centralidade leva em conta tanto a importância dos vizinhos do vértice quanto o grau do vértice em questão. Além disso, apresentamos uma comparação de desempenho da medida de centralidade A_α-autovetor com a medidas de centralidade de Autovetor e de Informação em algumas redes reais e em algumas famílias de grafos.

Referências

[1] P. O Boaventura Netto. **Grafos: Teoria, Modelo, Algoritmos**. Edgard Blucher LTDA, 2001. ISBN-10, 8521206801.

[2] L. C. Freeman. “A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness”. Em: **Sociometry** 40 (1977), pp. 35–41. DOI: 10.2307/3033543.

[3] L. C. Freeman. “Centrality in social networks conceptual clarification”. Em: **Social Networks** 1 (1979), pp. 215–239. DOI: 10.1016/0378-8733(78)90021-7.

[4] L. C. Freeman, S. P. Borgatti e D. R. White. “Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow”. Em: **Social Networks** 13 (1979), pp. 141–154. DOI: 10.1016/0378-8733(91)90017-N.

[5] R. A. Horn e C. R. Johnson. **Matrix Analysis**. Matrix Analysis. New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9780521839402.

[6] V. Nikiforov. “Merging the A- and Q-Spectral Theories”. Em: **Applicable Analysis and Discrete Mathematics** 11 (2017), pp. 81–107. DOI: 10.2298/AADM1701081N.

[7] T. S. Silva. “Um estudo de Medidas de Centralidade e Confiabilidade em Redes”. M.Sc. Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2010.