

Grafos e Curvas em Superfícies

H. C. da Silva¹

PGMAT-ICEX, Belo Horizonte, MG

P. Mehdipour²

DMA-UFV, Viçosa, MG

C. M. de Jesus³

DM-ICE-UFJF, Juiz de Fora, MG

Seja N uma superfície fechada e orientada com gênero $n > 0$. Um **emparelhamento de arestas** de um polígono regular \mathcal{P}_n , com $n = 2A$ lados chamados de arestas, separadas por pontos chamados de vértices, é uma aplicação quociente $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow N$ [3]. A imagem do bordo de \mathcal{P}_n pode ser associada a um grafo $\mathcal{G} = (V, A)$, mergulhado em N , onde a aplicação ϕ leva pares de arestas $(\Gamma_i, \Gamma_i^{-1})$ de \mathcal{P}_n em uma aresta γ_i de \mathcal{G} e leva k vértices $\{u_1, \dots, u_k\}$ de \mathcal{P}_n ($k \geq 2$) sobre um vértice u de \mathcal{G} (ver Figura 1). O número k corresponde ao grau do vértice u . Um grafo \mathcal{G} mergulhado em N é dito **grafo do emparelhamento de arestas** se existe uma aplicação quociente $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow N$ tal que \mathcal{G} coincide com a imagem do bordo de \mathcal{P}_n . Ou seja, um grafo é de emparelhamento de arestas se, e somente se, seu complemento em relação a N é homeomorfo a um disco. Em [5] os autores chamaram o emparelhamento cujo grafo tem um único vértice de **emparelhamento canônico**. Em [2] os autores introduziram duas cirurgias de emparelhamento de arestas, chamadas de cirurgia vertical e cirurgia horizontal. Estas cirurgias permitem determinar famílias de grafos de emparelhamento de arestas sobre uma superfície $W = M \# N$, a partir de dois grafos de emparelhamento \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , mergulhados nas respectivas superfícies fechadas e orientadas M e N . Mais tarde, em [5] os autores introduziram a extensão e a contração de grafos de emparelhamento de arestas sobre uma superfície fechada e orientada. Com essa técnica mostraram que qualquer grafo de emparelhamento de arestas sobre uma superfície N pode ser obtido por uma sequência de extensões de um grafo de emparelhamento canônico sobre N .

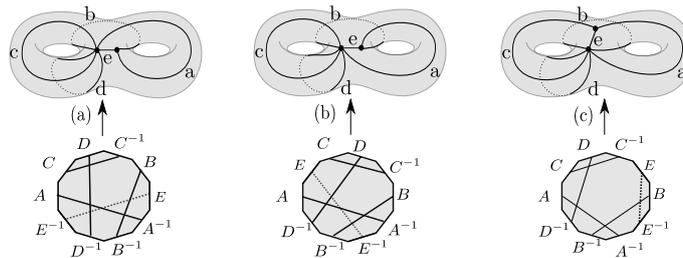


Figura 1: Exemplos de emparelhamentos de arestas de \mathcal{P}_{10} no Bitoro. Fonte: Retirada de [7]

Sejam $\Gamma = \cup_{i=1}^r \mathbb{S}_i^1$, a união de r círculos, $r \geq 1$, e $f : \Gamma \rightarrow N$ uma imersão de Γ em N . Denotamos por $\mathcal{B}_f = f(\Gamma)$ a imagem de Γ por f e por $\mathcal{C}^\infty(\Gamma, N)$ o conjunto de todas as aplicações suaves $f : \Gamma \rightarrow N$.

¹hoechstcornelio@gmail.com

²pouya@ufv.br

³cmendesjesus@ufjf.br

- Uma aplicação $f \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma, N)$ será dita **estável** se todas as autointerseções em \mathcal{B}_f , chamados de **pontos duplos**, são transversais [1, 4]. Ou seja, \mathcal{B}_f não tem pontos de tangências ou outras singularidades além de possíveis pontos duplos transversais e isolados. O conjunto de todas as aplicações estáveis será denotado por $\mathcal{E}(\Gamma, N)$.

- Duas aplicações suaves $f, h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma, N)$ são ditas **homotópicas** se existe uma aplicação $H : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow N$ contínua, tal que $H(x, 0) = h(x)$ e $H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in \Gamma$. Uma aplicação $f : \Gamma \rightarrow N$ será dita **aplicação planar** se f é homotópica a alguma aplicação $h : \Gamma \rightarrow N$, tal que $h(\Gamma) \subset \mathcal{D}_N$, onde \mathcal{D}_N denota uma região simplesmente conexa de N (ver Figura 2).

A proposta deste trabalho é apresentar uma condição necessária para que uma dada aplicação estável $f : \Gamma \rightarrow N$ seja uma aplicação planar. Para isso vamos considerar um grafo \mathcal{G} de algum emparelhamento de arestas em N , que será dito **transversal** ao conjunto de curvas \mathcal{B}_f em N se o conjunto de interseção $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_f$ é vazio ou se $p \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_f$ então p não é um vértice de \mathcal{G} e nem um ponto duplo de \mathcal{B}_f , além disso a interseção entre \mathcal{B}_f e \mathcal{G} em p ocorre de forma transversal [6]. O número de pontos na interseção entre \mathcal{B}_f e \mathcal{G} será denotado por $\#\{\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_f\}$. Os graus dos vértices de \mathcal{G} e o número $\#\{\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_f\}$ fornece uma condição necessária para que f seja uma aplicação planar.

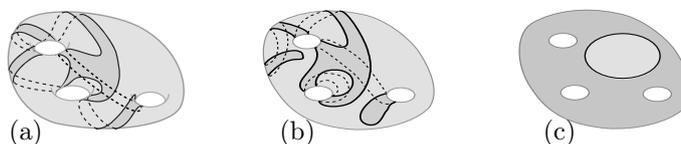


Figura 2: Curvas fechadas no Trito: (a) não planar; (b) e (c) curva planar. Fonte: Imagem autoral

Agradecimentos

Agradecemos à FAPEMIG pelo apoio concedido a este trabalho.

Referências

- [1] V. I. Arnold. **Topological invariants of plane curves and caustics**. Vol. 5. American Mathematical Soc., 1994.
- [2] M. B. Faria, C. M. de Jesus e P. D. R. Sanchez. “Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series** 47.4 (2016), pp. 1085–1095.
- [3] M. B. Faria e R. Palazzo Jr. “Emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g-6, 3\}$ ”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 11.1 (2010), pp. 59–67.
- [4] M. Golubitsky e V. Guillemin. **Stable mappings and their singularities**. Vol. 14. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] C. M. de Jesus e P. D. Romero. “Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series** 51.2 (2020), pp. 527–541.
- [6] C. M. Jesus Sanchez, G. F. da Silva e J. L. Bretas. “Emparelhamento de arestas e aplicações estáveis”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 9.1 (2022).
- [7] H. C. da Silva, C. M. de Jesus e J. R. P. Coêlho. “Grafos de Emparelhamento de Arestas”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 24.2 (2023), pp. 377–393.