

## Número Cromático Antimágico Local de Algumas Subclasses de Árvores Rosas Perfeitas

João G. F. Rocha,<sup>1</sup> André E. Brondani,<sup>2</sup> Francisca A. M. França<sup>3</sup>  
VMA/ICEX/UFF, Volta Redonda, RJ

Seja  $G = (V, E)$  um grafo simples, conexo, de ordem  $n$  e tamanho  $m$ . Para a terminologia fundamental da teoria dos grafos, seguimos [2]. O **número cromático** de um grafo  $G$  é o menor número de rótulos distintos que podem ser atribuídos aos seus vértices, de modo que vértices adjacentes recebam rótulos diferentes. Em contextos mais recentes, surgiram variantes que consideram rotulações de arestas, como a rotulação antimágica local. O estudo dessas rotulações fornece informações estruturais adicionais sobre o grafo e apresenta aplicações em áreas como alocação de frequência e criptografia.

Seja  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  uma bijeção sobre as arestas de  $G$ . Para cada  $v \in V$ , o **peso** de  $v$  é dado por  $f^+(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$ , onde  $E(v)$  denota o conjunto das arestas que incidem em  $v$ . Quando  $f^+(v) \neq f^+(u)$  para cada par de vértices  $u, v$  adjacentes em  $G$ , a bijeção  $f$  é denominada **rotulação antimágica local** de  $G$ . Assim, qualquer rotulação antimágica local induz uma rotulação dos vértices de  $G$ , definida pelos pesos  $f^+(v)$  atribuídos a cada vértice  $v$ . Um grafo  $G$  é dito **antimágico local** se  $G$  possui uma rotulação antimágica local. O **número cromático antimágico local** de  $G$ , denotado por  $\chi_{la}(G)$ , é o menor número de pesos distintos atribuídos aos vértices, considerando todas as possíveis rotulações antimágicas locais de  $G$ .

Considere o caminho  $P_6$ , com vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e arestas  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ . Na Figura 1, apresentamos a rotulação antimágica local de  $P_6$ , conforme [1], a qual determina seu número cromático antimágico local.

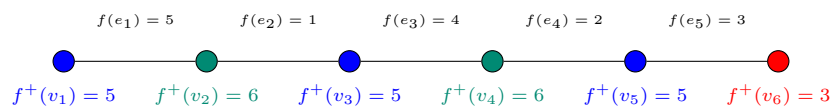


Figura 1:  $\chi_{la}(P_6) = 3$ . Fonte: autor.

Foi provado em [1] que, para toda árvore  $T$  com  $\ell$  folhas, o número cromático antimágico local satisfaz a desigualdade  $\chi_{la}(T) \geq \ell + 1$ . Além disso, os autores em [3] conjecturaram que  $\chi_{la}(T) \leq \ell + 2$  e propuseram uma caracterização das árvores em que  $\chi_{la}(T) = \ell + 1$ . Motivados por estes problemas, investigamos o número cromático antimágico local das árvores rosas perfeitas, que definimos a seguir.

Dados inteiros positivos  $k$  e  $r$ , a **árvore rosa perfeita**  $R_{k,r}$  é obtida ao conectar o vértice central de um caminho de ordem ímpar  $P_{2k+1}$  ao vértice central de uma estrela  $S_r$  de ordem  $r$ .

A seguir, enunciamos alguns dos resultados originais que obtivemos durante nossas pesquisas e que respondem aos problemas enunciados acima para algumas subclasses das árvores rosas perfeitas.

<sup>1</sup>jofreitas@id.uff.br

<sup>2</sup>andrebrondani@id.uff.br

<sup>3</sup>francisca\_franca@id.uff.br

**Teorema 1.** Dado  $r \geq 4$ , o número cromático antimágico local da árvore rosa perfeita  $R_{4,r}$  é dado por  $\chi_{la}(R_{4,r}) = r + 2$ .

*Ideia da demonstração.* Considere  $R_{4,r}$  cujo conjunto de vértices é  $V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 9 + r\}$  e o seu conjunto de arestas é dado por  $E = \{e_i \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq 8 + r\}$ . Definindo a rotulação antimágica local  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, 8 + r\}$  de acordo com a Tabela 1:

Tabela 1: Rotulação antimágica local  $f$  de  $R_{4,r}$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$(10 \leq i \leq 8 + r)$
$f(e_i)$	9	3	5	7	2	6	4	8	1	$i$

obtemos a rotulação induzida sobre os vértices de  $R_{4,r}$ ,  $f^+ : V \rightarrow \{1, 2, \dots, 9 + r\}$ , definida como descrito na Tabela 2.

Tabela 2: Rotulação de vértices  $f^+$  induzida por  $f$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$(11 \leq i \leq 9 + r)$
$f^+(v_i)$	9	12	8	12	10	8	10	12	8	$1 + \frac{(r-1)(r+18)}{2}$	$i - 1$

Comparando a quantidade de pesos distintos nos vértices com a cota inferior estabelecida em [1], obtemos o resultado.  $\square$

A Figura 2 exibe uma rosa perfeita  $R_{4,4}$  com a rotulação antimágica local de acordo com as Tabelas 1 e 2. Note que vértices com pesos iguais possuem a mesma cor na figura.

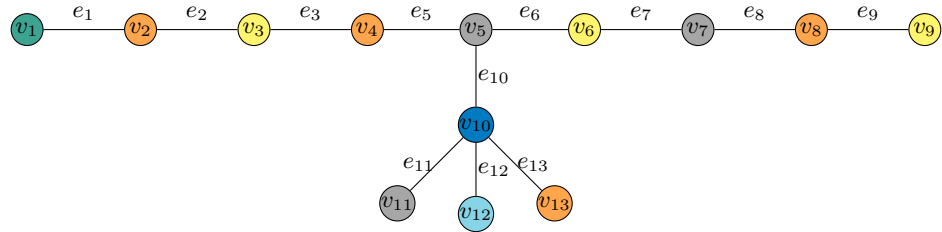


Figura 2: Árvore  $R_{4,4}$  com  $\chi_{la}(R_{4,4}) = 6$ . Fonte: autor

Conforme o Teorema 1, para verificar os resultados seguintes, foram construídas rotulações antimágicas locais específicas para cada subclasse de  $R_{k,r}$ .

**Teorema 2.** Se  $r \geq 4$ , então  $\chi_{la}(R_{5,r}) = r + 2$ .

**Teorema 3.** Se  $k \geq 6$  e  $r \geq 2k - 8$ , então  $\chi_{la}(R_{k,r}) = r + 2$ .

## Referências

- [1] S. Arumugam, K. Premalatha, M. Bača e A. Semaničová-Feňovčíková. “Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph”. Em: **Graphs and Combinatorics** 33.2 (2017), pp. 275–285. DOI: 10.1007/s00373-017-1758-7.
- [2] R. Diestel. **Graph Theory**. 5th. Springer, 2017. ISBN: 978-3-662-53621-6.
- [3] K. Premalatha, S. Arumugam, Yi-Chun Lee e Tao-Ming Wang. “Local antimagic chromatic number of trees - I”. Em: **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography** 25.6 (2020), pp. 1591–1602. DOI: 10.1080/09720529.2020.1772985.