

Convexidade Cíclica em Grafos

Guilherme C.M. Gomes¹, Laila M. V. Lopes², Vinicius F. dos Santos³

Departamento de Ciéncia da Computaçao, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil.

Convexidades em grafos são inspiradas no conceito de mesmo nome em geometria mas adaptadas para esse contexto. Diferentes definições do que constitui um conjunto convexo já foram estudadas, entre as mais conhecidas estão aquelas definidas sobre caminhos, como as convexidades P_3 [3] e geodética [4]. Além do interesse teórico, processos como a propagação de informações ou epidemias podem ser modelados por conceitos de convexidade em grafos – estruturas que capturam regras de influência em redes sociais complexas. Nesses contextos, as regras de propagação estão diretamente relacionadas com uma definição de uma convexidade em grafos e o objeto de estudo se torna a função de intervalo da convexidade, que é o conceito análogo à combinação convexa, da geometria.

Neste trabalho, abordamos a **convexidade cíclica**, inicialmente motivada por aplicações em teoria dos nós [2]. Formalmente, dado um grafo G e um subconjunto $S \subseteq V(G)$, a função de intervalo infecta $v \notin S$ se existe um ciclo em $G[S \cup \{v\}]$. Alguns aspectos dessa convexidade já foram estudados, com resultados recentes sobre seus números de intervalo [1] e de convexidade [6]. Nosso objetivo é responder uma terceira questão de interesse na área de convexidade em grafos para a convexidade cíclica, que chamamos de PARTIÇÃO EM CONJUNTOS CONVEXOS CÍCLICOS (PCCC): dado um grafo G e um inteiro k , é possível partitionar G em exatamente k conjuntos convexos? Este problema já foi considerado em diversas outras convexidades. Uma breve revisão da literatura, bem como resultados recentes podem ser encontrados em [5].

O principal resultado deste trabalho é o teorema a seguir.

Teorema 1. *O problema PCCC é NP-completo mesmo se $k = 2$.*

A demonstração é baseada em uma redução do problema 2-IN-3-SAT, uma variação conhecida do problema 3-SAT. Nela, exatamente dois literais devem ser verdadeiros em cada cláusula para a instância ser satisfeita. Na redução feita, foram utilizados dois gadgets principais, que podem ser visualizados nas Figuras 1, ??, e ???. Intuitivamente, queremos que cada cópia esteja sempre partitionada em dois conjuntos; para os gadgets de literais, isso se traduz em uma atribuição que torna o literal correspondente verdadeiro ou falso; para isso adicionamos arestas entre gadgets oriundos de literais de uma mesma variável para forçar que as partições sejam globalmente coerentes.

O ponto chave da prova é a introdução de um ciclo $c_{i,1}, x_{i,1}, x_{i,2}, c_{i,2}, y_{i,1}, y_{i,2}, c_{i,3}, z_{i,1}, z_{i,2}$ para cada cláusula i que contém as variáveis x, y, z . Intuitivamente, se dois dos literais não são verdadeiros, isso deve forçar que o conjunto $\{c_{i,1}, c_{i,2}, c_{i,3}\}$ seja subconjunto de um dos conjuntos convexos e que o gadget da cláusula C_i também está no mesmo conjunto. Com a adição das arestas adequadas, isso implicaria que o grafo não foi partitionado. Com o Teorema 1, podemos generalizar nosso resultado para todo $k \geq 2$. Formalizamos esse resultado no Teorema 2.

Teorema 2. *Para qualquer $k \geq 2$ fixo, o problema PCCC é NP-completo.*

¹gcm.gomes@dcc.ufmg.br

²lailamvl@gmail.com

³viniciussantos@dcc.ufmg.br

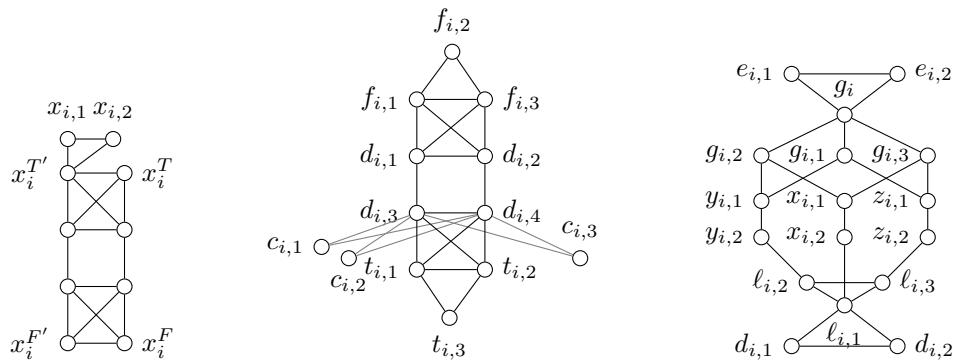


Figura 1: a) Gadget que representa um literal. b) Gadget que representa uma cláusula. c) Gadget que força pelo menos um literal ser avaliado como falso. Fonte: autoria própria.

A prova do Teorema 2 é feita por indução, tendo como caso base $k = 2$. Para o passo indutivo, a partir de uma instância H , construímos uma instância H' da seguinte maneira. Seja $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ temos que $V(H') = V(H) \cup \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $E(H') = E(H) \cup \{v_i u_i | i \in [n]\}$. A partir dessa construção, é possível provar que H' possui uma partição em k conjuntos convexos se, e somente se H possui uma partição em $k - 1$ conjuntos convexos.

Além desses resultados de NP-completude, encontram-se em desenvolvimento algoritmos polinomiais para casos particulares onde o grafo de entrada pertence a determinadas classes de grafos, como grafos cordais e disco unitários.

Agradecimentos

Este trabalho conta com o apoio da FAPEMIG.

Referências

- [1] J. Araujo, G. Ducoffe, N. Nisse e K. Suchan. “On interval number in cycle convexity”. Em: **Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science** 20.1 (2018), p. 13. DOI: <https://doi.org/10.23638/DMTCS-21-1-13>.
- [2] J. Araújo, V. Campos, D. Girão, J. Nogueira, A. Salgueiro e A. Silva. “Cycle convexity and the tunnel number of links”. Em: **preprint arXiv:2012.05656** (2020).
- [3] C. C. Centeno, M. C. Dourado e J. L. Szwarcfiter. “On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs”. Em: **Electronic Notes in Discrete Mathematics** 32 (2009), p. 11. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2009.02.003>.
- [4] M. G. Everett e S. B. Seidman. “The Hull Number of a Graph”. Em: **Discrete Mathematics** 57.3 (1985), pp. 217–223. DOI: [10.1016/0012-365X\(85\)90147-5](https://doi.org/10.1016/0012-365X(85)90147-5).
- [5] L. M. González, L. N. Grippo, M. D. Safe e V. F. dos Santos. “Covering graphs with convex sets and partitioning graphs into convex sets”. Em: **Information Processing Letters** 158 (2020), p. 105944. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.01581>.
- [6] C. V. G. C. Lima, T. Marclon e P. P. de Medeiros. “The complexity of convexity number and percolation time in the cycle convexity”. Em: **preprint arXiv:2404.09236** (2024).