Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Exploração sobre Torções Bem-Arredondadas de Reticulados no Plano

Nicoll V. J. Nieves[1] Carina Alves[2]
IGCE/Unesp, Rio Claro, SP

Os reticulados desempenham um papel fundamental em diversas áreas da matemática, incluindo teoria dos números algébricos, teoria dos corpos e teoria dos corpos finitos. Em particular, reticulados provenientes de corpos de números totalmente reais reais são candidatos promissores para a construção de reticulados com boas propriedades, como empacotamento esférico e distância produto mínima [1, 2]. Neste trabalho, nos baseamos nas referências [3, 4] e exploramos o conceito de torções bem-arredondadas em reticulados oriundos de corpos quadráticos reais, com foco na construção explícita dessas torções.

Para isso, consideramos Λ um reticulado de posto completo em $\mathbb{R}^n$. O conjunto dos vetores mínimos de Λ é definido por

$$S(\Lambda) = \{x \in \Lambda : \|x\|^2 = |\Lambda|\}, \tag{1}$$

onde $|\Lambda| = min\{\|x\|^2 : x \in \Lambda,\ x \neq 0\}$ e $\|\ \|$ é a norma euclidiana usual em $\mathbb{R}^n$. Um reticulado Λ é bem-arredondado se $S(\Lambda)$ gera $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal no anel dos inteiros $\mathcal{O}_K$ de um corpo quadrático real $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. A ideia central consiste em aplicar uma torção por meio de uma matriz diagonal, de modo que o reticulado torcido associado ao ideal $\mathcal{I}$ torne-se bem-arredondado.

Primeiramente, introduzimos a noção de uma base B de um reticulado $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ ser *boa para torção.*

Considere o grupo diagonal

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ T_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix} : \alpha > 0 \right\} \tag{2}$$

e seja $\Lambda \in \mathcal{L}_2 := SL2(\mathbb{R})/SL2(\mathbb{Z})$ um reticulado.

Uma base B de Λ será dita *boa para torção* (ou simplesmente uma *boa base*) se existir uma matriz de torção $T_\alpha \in \mathcal{A}_2$ tal que o reticulado torcido $T_\alpha\Lambda$ seja bem-arredondado e possua $T_\alpha B$ como uma base constituída de vetores mínimos.

Diante disso, mostramos que B é boa para torção se, e somente se,

$$F(B) = F(x,y) = N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2 - \frac{N(\mathcal{I})^2\Delta_{\mathbb{K}}}{4} \leq 0, \tag{3}$$

onde $N(\cdot)$ representa a norma, $N(\mathcal{I})$ a norma do ideal e $\Delta_{\mathbb{K}}$ o discriminante do corpo $\mathbb{K}$. Além disso, para $u \in \mathbb{K}$, escrevemos $\bar{u}$ para indicar a conjugação $\mathbb{Q}$-linear de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, isto é, a involução que envia $\sqrt{D}$ em $-\sqrt{D}$. Nesse caso, quando $F(B) \leq 0$, o parâmetro de torção é dado por $\alpha = ((\bar{y}^2 - \bar{x}^2)(x^2 - y^2))^{1/4}$.

[1]jerez.nieves@unesp.br
[2]carina.alves@unesp.br

Ademais, mostramos que o reticulado ortogonal é uma torção de $\Lambda_{\mathcal{I}}$ se, e somente se, o ideal $\mathcal{I}$ admitir uma base $B = \{x, y\}$ satisfazendo $N(x) + N(y) = 0$, bem como o reticulado hexagonal é uma torção de $\Lambda_{\mathcal{I}}$ se, e somente se, $\mathcal{I}$ admitir uma base $B = \{x, y\}$ tal que $F(x, y) = 0$.

Este estudo contribui para a compreensão das torções bem-arredondadas de reticulados $\Lambda_{\mathcal{I}}$ obtidos através de corpos quadráticos reais, oferecendo uma abordagem explícita para o seu cálculo. A formalização dos critérios de "boa torção" possibilita avanços relevantes na compreensão das propriedades geométricas dos reticulados oriundos de corpos quadráticos reais [3]. As implicações desses resultados são significativas para aplicações em comunicação sem fio [5], onde reticulados com boas propriedades são essenciais para garantir a segurança e a eficiência dos sistemas de comunicação.

Agradecimentos

Esta pesquisa é financiada pela FAPESP Proc. 2023/15735-8 e CNPq 405842/2023-6. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade dos autores e não necessariamente refletem a visão da FAPESP e do CNPq.

Referências

[1] E. Bayer-Fluckiger, F. Oggier e E. Viterbo. "Algebraic lattice constellations: bounds on performance". Em: **IEEE Transactions on Information Theory** 34 (2006), pp. 319–327. DOI: `10.1109/TIT.2005.860499`.

[2] J. Boutros, E. Viterbo, C. Rastello e J.-C. Belfiore. "Good lattice constellations for both Rayleigh fading and Gaussian channels". Em: **IEEE Transactions on Information Theory** 34 (1996), pp. 502–518. DOI: `10.1109/18.485703`.

[3] M. Damir e D. Karpuk. "Well-rounded twists of ideal lattices from real quadratic fields". Em: **Journal of Number Theory** 34 (2019), pp. 168–196. DOI: `10.1016/j.jnt.2018.10.002`.

[4] L. Fukshansky e K. Petersen. "On well-rounded ideal lattices". Em: **International Journal of Number Theory** 34 (2012), pp. 189–206. DOI: `10.1142/S1793042112500112`.

[5] F. Oggier e E. Viterbo. "Algebraic number theory and code design for Rayleigh fading channels". Em: **Communications in Information Theory** 1.3 (2004), pp. 333–416. DOI: `10.1561/0100000006`.

