Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 12, n. 1, 2026.

Trabalho apresentado no XLIV CNMAC, Fundação Getulio Vargas - Rio de Janeiro - RJ, 2025.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Detectando Órbitas k-Hiperbólicas e Bifurcações de Dobra de Período

Gean F. A. De La Cruz [1], Murilo R. Cândido[2]
FCT UNESP, Presidente Prudente, SP

A busca por soluções periódicas em sistemas de equações diferenciais ordinárias tem sido um dos temas centrais na teoria dos sistemas dinâmicos, dada sua relevância tanto teórica quanto aplicada. O método de averaging, amplamente utilizado para estudar a existência e a estabilidade de órbitas periódicas (ver [7]), constitui uma ferramenta poderosa para a análise de sistemas perturbados. Tradicionalmente, esse método baseia-se na identificação dos zeros isolados das funções médias associadas ao sistema (ver [1, 2]). Contudo, em contextos de dimensão superior (n $\geq$ 3), surgem desafios adicionais, como a ocorrência de zeros não isolados.

Neste trabalho, propomos uma abordagem inovadora para detectar um tipo de órbita periódica, denominada *órbita k-hiperbólica*, que emerge a partir da análise dos zeros não isolados das funções médias. Ademais, estudamos a ocorrência de bifurcações de dobra de período, fenômeno que indica a transição para regimes dinâmicos mais complexos e a possível emergência de cascatas de dobramentos. A combinação do método de averaging com elementos da Teoria do Grau (ver [3]) e versões modificadas do Teorema da Função Implícita possibilita ampliar o alcance do método clássico e identificar soluções periódicas ocultas para as técnicas convencionais (ver [4]).

O método de averaging parte da transformação do sistema original por meio de uma mudança de variáveis e reescalonamento, isolando os termos de ordem dominante. Considere, por exemplo, um sistema planar da forma

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y),$$

que, após uma adequada mudança de variáveis, pode ser reescrito de modo que a condição para a existência de uma órbita periódica se reduza à determinação dos zeros isolados de uma função média $g(\rho)$.

Em sistemas de dimensão $n \geq 3$, entretanto, o método tradicional mostra-se insuficiente, pois os zeros das funções médias podem não ser isolados. Para contornar essa limitação, recorremos a versões modificadas do Teorema da Função Implícita e à Teoria do Grau de Brouwer (ver [3, 4]). Esses instrumentos permitem analisar não apenas os zeros isolados, mas também conjuntos contínuos de zeros que, sob certas condições, podem gerar soluções periódicas não linearmente hiperbólicas.

Nesse contexto, definimos uma órbita periódica como *k-hiperbólica* se a matriz jacobiana do mapa de Poincaré associada à órbita possuir, até uma ordem truncada, um jato hiperbólico. Essa definição é crucial para estabelecer a estabilidade das soluções e demonstrar que tais órbitas são candidatas naturais a bifurcações de dobra de período. Em termos práticos, a análise da estabilidade passa pela determinação de uma matriz truncada

$$T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \cdots + \varepsilon^k T_k,$$

[1] gean.la@unesp.br
[2] mr.candido@unesp.br

cujo comportamento sob perturbações garante a existência e a hiperbolicidade das órbitas k-hiperbólicas (ver [6]).

Utilizando as ferramentas teóricas descritas, demonstramos a existência de órbitas k-hiperbólicas em uma ampla classe de sistemas autônomos de dimensão $n \geq 3$. A estratégia consiste em obter um truncamento das funções médias do sistema e identificar os conjuntos de zeros não isolados. A aplicação combinada do Teorema da Função Implícita e da Teoria do Grau possibilita selecionar os zeros que garantem a hiperbolicidade dos jatos correspondentes.

Adicionalmente, mostramos que essas órbitas podem sofrer bifurcações de dobra de período. Esse fenômeno, caracterizado pelo surgimento de uma nova órbita com período duplicado, é interpretado como um mecanismo gerador de cascatas de bifurcações, resultando em uma dinâmica rica e na emergência de um grande número de soluções periódicas isoladas. Estudos recentes (ver [5]) indicam que a análise dessas bifurcações fornece importantes insights sobre a transição para comportamentos caóticos em sistemas não lineares.

Os resultados obtidos possuem implicações práticas, pois a capacidade de detectar com precisão as órbitas k-hiperbólicas e prever as condições para a ocorrência de bifurcações de dobra de período possibilita um controle mais refinado dos sistemas dinâmicos. Essa abordagem contribui significativamente para o avanço do conhecimento na análise qualitativa de EDOs e tem potencial para aplicações em diversos campos da ciência e engenharia.

A abordagem apresentada evidencia que a integração entre o método de averaging e as técnicas da Teoria do Grau, combinada com versões aprimoradas do Teorema da Função Implícita, amplia significativamente o espectro de detecção de soluções periódicas em sistemas de alta dimensão. As órbitas k-hiperbólicas emergem como um novo paradigma na análise de sistemas dinâmicos, fornecendo uma ferramenta robusta para o estudo de bifurcações, especialmente as de dobra de período.

Os resultados aqui expostos apontam para caminhos promissores para futuras investigações, tanto na formulação de novos problemas teóricos quanto na aplicação prática dessas técnicas em modelos reais. Em síntese, este trabalho contribui para o aprofundamento dos métodos de análise de sistemas não lineares e reforça a importância dos fundamentos matemáticos no desenvolvimento de técnicas avançadas para a identificação de comportamentos complexos.

Referências

[1] L. Barreira, J. Llibre e C. Valls. “Periodic orbits near equilibria via averaging theory of second order”. Em: **Mathematical Modelling and Analysis** 17.5 (2012), pp. 715–731.

[2] L. Barreira, L. Llibre e C. Valls. “Periodic orbits near equilibria”. Em: **Communications on Pure and Applied Mathematics** 63.9 (2010), pp. 1225–1236.

[3] A. Buică e J. Llibre. “Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree”. Em: **Bulletin des Sciences Mathématiques** 128.1 (2004), pp. 7–22.

[4] M. R. Cândido, J. Llibre e D.D. Novaes. “Persistence of periodic solutions for higher order perturbed differential systems via Lyapunov–Schmidt reduction”. Em: **Nonlinearity** 30.9 (2017), p. 3560.

[5] M. R. Cândido, D.D. Novaes e C. Valls. “Periodic solutions and invariant torus in the Rössler system”. Em: **Nonlinearity** 33.9 (2020), p. 4512.

[6] J. T. Montgomery. “Existence and stability of periodic motion under higher order averaging”. Em: **Journal of Differential Equations** 64.1 (1986), pp. 67–78.

[7] J. A. Sanders, F. Verhulst e J. Murdock. **Averaging methods in nonlinear dynamical systems**. 2nd. Vol. 59. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 2007.